



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### **Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### **About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>

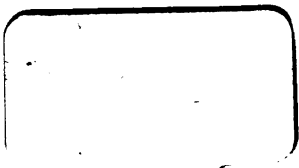


GODFREY LOWELL CABOT SCIENCE LIBRARY  
*of the Harvard College Library*

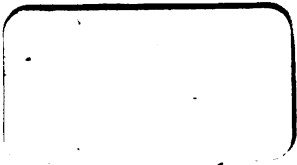
This book is  
**FRAGILE**  
and circulates only with permission.  
Please handle with care  
and consult a staff member  
before photocopying.

Thanks for your help in preserving  
Harvard's library collections.

1

















**MÉMOIRE**  
**SUR LA**  
**REPRÉSENTATION DES SURFACES**  
**ET LES**  
**PROJECTIONS DES CARTES GÉOGRAPHIQUES.**

---

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,  
Quai des Grands-Augustins, 55.

---

○

# MÉMOIRE

SUR LA

# REPRÉSENTATION DES SURFACES //

ET LES

PROJECTIONS DES CARTES GÉOGRAPHIQUES;

PAR

M. A. TISSOT,

Examineur d'admission à l'École Polytechnique.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESEUR DE MALLET-BACHELIER,

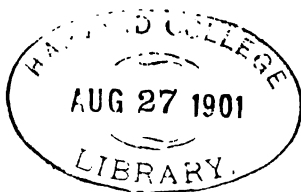
Quai des Augustins, 55.

—  
1881

(Tous droits réservés.)

51

Eng 528.81



Haven fund

---

Le *Préambule* et les quatre *Chapitres* de ce Mémoire ont paru, en 1878, 1879 et 1880, dans les t. XVII, XVIII et XIX des *Nouvelles Annales de Mathématiques* (2<sup>e</sup> série). Le *Complément* et les *Tableaux numériques* sont ici publiés pour la première fois.

---

---

# TABLE DES MATIÈRES.

---

## PRÉAMBULE.

	Pages
Objet du Mémoire.....	1

## CHAPITRE I.

Préliminaires.....	7
Loi de la déformation ..	9
Ellipse indicatrice .....	14
Altérations d'angles .....	15
Altérations de longueurs.....	18
Altérations de surfaces.....	20
Détermination des axes de l'ellipse indicatrice .....	20
Systèmes de courbes satisfaisant à certaines conditions.....	27
Doubles canevas satisfaisant à certaines conditions .....	32

## CHAPITRE II.

Recherche du système de projection le mieux approprié à la représentation d'une contrée particulière .....	41
Carte d'un pays limité dans les deux sens.....	43
Applications .....	59
Carte d'une zone.....	70
Carte d'un fuseau.....	71

## CHAPITRE III.

Étude de la déformation produite par les divers modes de projection dans la construction des mappemondes.....	73
Projections autogonales.....	78
Projections aouthaliques .....	82
Projections aphyllactiques .....	89
Projections centrales .....	97

## CHAPITRE IV.

Cartes de portions du globe moindres qu'un hémisphère.....	101
Choix d'un mode de projection.....	108

**COMPLÉMENT.**

	Pages
Objet du complément.....	127
Classification des projections.....	128
Notions historiques.....	134
Formules relatives à la déformation.....	141
Projections cylindriques.....	151
Projections méricylindriques.....	164
Projections centrales.....	190
Projections coniques.....	212
Projections mériconiques.....	241
Projections polyconiques.....	247
Projections sphériques rectangulaires.....	263
Projections sphériques obliquangles.....	296
Projections mérisphériques.....	303
Projections non classées.....	306
Formules communes aux diverses classes de projections.....	314

**TABLEAUX NUMÉRIQUES.**

( Pagination spéciale de 1 à 60. )

MÉMOIRE  
SUR LA  
REPRÉSENTATION DES SURFACES  
ET LES  
PROJECTIONS DES CARTES GÉOGRAPHIQUES

---

PRÉAMBULE.

*Objet du Mémoire et de chacun des Chapitres  
en particulier.*

Le présent Mémoire a pour objet l'étude de la déformation dans la représentation d'une surface sur une autre, notamment dans la construction des cartes géographiques.

Le premier Chapitre traite de la loi de la déformation et des propriétés générales qui en dérivent. Le deuxième est consacré à la résolution de cette question : *Trouver le mode de projection le mieux approprié à la représentation plane d'une contrée particulière.* Dans les deux derniers, on compare entre elles les diverses projections des cartes géographiques au point de vue de la déformation.

Nous commençons par établir en partie le lemme suivant, dont la démonstration se trouve complétée un peu plus loin : *Quel que soit le système de projection, il y a, en tout point de l'une des surfaces, deux tangentes perpendiculaires entre elles, et, si les angles ne sont pas conservés, il y en a deux seulement, telles que les directions qui leur correspondent sur l'autre surface se coupent aussi à angle droit.* De là résulte l'existence



de deux séries uniques de courbes orthogonales ayant aussi leurs projections orthogonales. En faisant varier de toutes les manières possibles le mode de succession des courbes de chaque série, on obtient une infinité de doubles canevas dont chacun décompose les deux surfaces en rectangles infiniment petits, et qui sont les seuls à posséder cette propriété dans le système de projection que l'on considère.

La déformation est soumise à une loi qui ne dépend ni de la nature des surfaces ni du mode de représentation adopté : *Toute représentation d'une surface sur une autre peut être remplacée, autour de chaque point, par une projection orthogonale faite à une échelle convenable* (\*). Le lemme établi préalablement permet de donner de cette loi une démonstration géométrique très-simple. En suivant une marche inverse, il serait facile de constater analytiquement qu'un cercle infiniment petit tracé autour d'un point quelconque de la première surface, dans le plan tangent en ce point, est remplacé sur la seconde par une ellipse, ce qui prouverait autrement la loi énoncée ainsi que le lemme (\*\*). De cette loi découlent un grand nombre de propriétés (\*\*\*) .

(\*) Dans les figures homographiques, les relations métriques sont une conséquence des relations descriptives (Mémoire de M. Chasles, faisant suite à l'*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie*). Cette propriété fondamentale, dont Abel Transon a donné, dans les *Nouvelles Annales*, une démonstration analytique, se déduit immédiatement de la loi de la déformation.

(\*\*) Cette loi et ce lemme ont leurs analogues dans la représentation des figures à trois dimensions.

(\*\*\*) Dans le tome XLIX des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, nous avons publié, sans démonstration, les énoncés de ces propriétés et celui de la loi sur laquelle elles reposent. Depuis, ils ont été reproduits par M. A. Germain dans son *Traité des projections des cartes géographiques*, et par M. Ulysse Dini dans son *Mémoire Sopra*

Si l'on adopte comme unité le rayon du cercle infiniment petit, l'ellipse qui représente ce cercle et constitue une sorte d'*indicatrice* du mode de projection au point considéré aura ses dimensions exprimées par des nombres finis. Connaissant ses axes, on pourra calculer l'altération éprouvée par un angle donné, le *maximum* dont cette altération est susceptible, les rapports suivant lesquels les longueurs se trouvent modifiées dans les diverses directions, le plus grand et le plus petit de ces rapports, lesquels sont précisément égaux aux demi-axes, enfin l'altération de superficie. Quant aux longueurs et aux directions des axes, nous établirons les formules qui servent à les déterminer en fonction de deux coordonnées fixant à la fois la position de chaque point sur la première surface et celle de sa projection sur la seconde.

Ayant ainsi fourni le moyen d'étudier la déformation produite autour de chaque point, nous résoudrons d'autres questions dans lesquelles il s'agira de trouver sur les deux surfaces, soit les couples de séries de lignes, soit les doubles canevas remplissant certaines conditions, par exemple les séries de lignes sur lesquelles les longueurs se trouvent modifiées dans un rapport constant, ou, plus généralement, dans un rapport exprimé par une fonction

*alcuni punti della teoria delle superficie* (Volumi dell' *Accademia dei XL*, 3<sup>e</sup> série, t. I), accompagnés de démonstrations propres à ces deux auteurs, mais moins simples que celles que nous avons en vue et que nous donnons ici.

M. Dini a fait voir de plus que toute la théorie de la courbure des surfaces peut se déduire des propriétés générales dont nous venons de parler. Il y est parvenu en les appliquant à la représentation d'une surface sur une sphère, effectuée d'après la méthode de Gauss, méthode dans laquelle on considère comme points correspondants ceux pour lesquels les normales sont parallèles.

Grâce à M. Faye, la loi de la déformation a aussi trouvé place dans le Cours d'Astronomie de l'École Polytechnique.

connue des deux coordonnées, les doubles canevas formés de rectangles infiniment petits, ceux dont les angles varient suivant une loi donnée, ceux qui décomposent les surfaces en une infinité de losanges.

On appliquera les théories du premier Chapitre à deux modes particuliers de représentation plane d'une surface quelconque de révolution.

Dans le deuxième Chapitre, nous donnons le moyen de déterminer, pour les cartes de contrées d'une étendue comparable à celle de la France, quel est le système de projection qui occasionne la déformation la plus faible, non-seulement parmi ceux qui ont été considérés jusqu'à présent, mais parmi tous ceux qu'il serait possible d'imaginer. Afin de préciser davantage, disons qu'il s'agit d'un système qui, tout en ne produisant que des altérations d'angles de quelques secondes, par conséquent insignifiantes, réduise à son *minimum* la plus grande altération de longueur. Les coordonnées rectangulaires des divers points de la carte seront exprimées par des formules assez simples, les mêmes quel que soit le pays à représenter ; certains paramètres qui figurent dans ces formules varient seuls d'un pays à l'autre ; on en trouve les valeurs, dans chaque cas particulier, à l'aide d'un procédé graphique (\*). Une méthode analogue serait applicable à la recherche d'un mode de projection qui, tout en n'altérant les aires que de quantités négligeables, réduirait à son *minimum* la plus grande altération d'angle dans la représentation d'un pays donné.

---

(\*) Le tome LI des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* renferme une Note dans laquelle nous avons fait connaître les formules et le procédé en question, et dont le tome XXI des *Monthly Notices of the Royal astronomical Society* a donné une traduction anglaise.

Les régions peu étendues dans tous les sens ne sont pas les seules pour lesquelles nous donnions le moyen de déterminer le meilleur mode de projection. Nous avons résolu la même question pour toute zone comprise entre deux parallèles dont la différence des latitudes n'atteint pas un trop grand nombre de degrés, et aussi pour tout fuseau limité par deux méridiens dont l'angle remplit une condition analogue.

Les applications porteront principalement sur les cartes de France, d'Espagne, d'Égypte et d'Algérie.

Les deux derniers Chapitres se composent presque exclusivement de tableaux renfermant environ huit mille nombres à l'aide desquels on pourra se rendre un compte exact de la déformation produite par les divers systèmes de projection qui ont été jusqu'ici adoptés ou seulement proposés pour la construction des cartes géographiques (\*). Dans le Chapitre III, où l'on a en vue la représentation de tout un hémisphère, les tableaux se rapportent, pour la plupart, à des points situés de 15 en 15 degrés de latitude et de 15 en 15 degrés de longitude; dans le Chapitre IV, ils se rapportent à des points plus rapprochés sur des cartes de moindre étendue; en tout cas, ils font connaître principalement, pour chacun des points considérés, le *maximum* de l'altération d'angle,

---

(\*) Dans le principe, nous nous étions borné à considérer onze systèmes de projection (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. L; *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XIX; *Cosmos*, année 1865). L'extension donnée depuis à notre travail en a retardé la publication, mais elle nous met à même aujourd'hui de fournir aux constructeurs de cartes de Géographie et aux personnes qui veulent faire de ces cartes un usage rationnel des documents utiles en grande quantité. C'est seulement à l'aide de documents de cette nature que l'on peut reconnaître, parmi les divers systèmes de projection, celui qui convient le mieux à la représentation d'une portion donnée de la surface terrestre.

en degrés et minutes, les valeurs extrêmes du rapport dans lequel les longueurs se trouvent modifiées, avec trois chiffres décimaux, enfin le rapport des éléments superficiels avec la même approximation. Les ensembles de formules qui nous ont servi à calculer ces résultats numériques varient d'un système de représentation à un autre, mais tous se déduisent des formules générales établies dans le premier Chapitre ; afin d'abrégier, nous nous abstenons de les reproduire (\*); seulement, à cause de la confusion qui règne dans la nomenclature des diverses projections, il sera nécessaire que nous donnions en quelques mots la définition de chacune d'elles.

Nos tableaux ne concernent pas seulement les modes de représentation qui ont été mentionnés jusqu'à présent, mais aussi certains autres que les considérations suivantes nous engagent à proposer. La plupart des projections sont susceptibles d'être réparties en groupes tels que, dans chacun, elles ne diffèrent les unes des autres que par la valeur d'un paramètre. Parmi ces groupes, il y en a dont toutes les projections conservent les angles, d'autres dans lesquels une seule projection jouit de cette propriété, d'autres enfin dans lesquels aucune ne la possède : on peut chercher, pour chacun de ces derniers, quelle est la valeur du paramètre qui réduit à son *minimum* la plus grande des altérations d'angles de la carte. Une question analogue se présente à propos des aires, de même aussi à propos des longueurs, qui du reste ne se trouvent conservées sur aucune projection. Les solutions des questions ainsi posées dépendent nécessairement de

---

(\*) Nous comptons revenir ailleurs sur ce sujet. Dans le tome XXI du *Journal de l'École Polytechnique*, nous avons établi directement les formules relatives à la projection dite de *Bonne* ou du *Dépôt de la Guerre*.

l'étendue et de la forme des pays que l'on veut reproduire; celles que nous avons obtenues permettront de remplacer les projections actuellement en usage par d'autres plus avantageuses, et de représenter avec moins de déformation des portions considérables de la surface terrestre, telles qu'un hémisphère, les trois parties de l'ancien continent, les deux Amériques, l'empire russe, etc.

---

## CHAPITRE PREMIER.

### *Préliminaires.*

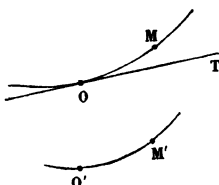
1. Pour représenter une surface sur une autre, on imagine que chacune se trouve décomposée, par deux systèmes de lignes, en parallélogrammes infiniment petits, et, à chaque ligne de la première, on fait correspondre une des lignes de la seconde; alors, l'intersection de deux lignes de systèmes différents sur l'une, et l'intersection des deux lignes correspondantes sur l'autre, déterminent deux points correspondants; enfin l'ensemble des points de la seconde qui correspondent aux points d'une figure donnée de la première constitue la *représentation* ou la *projection* de cette figure. On obtient les divers modes de représentation en faisant varier les deux séries de lignes qui tracent le canevas sur l'une des surfaces.

2. A moins que les deux surfaces ne soient applicables l'une sur l'autre, il est impossible de choisir un mode de projection tel qu'il y ait similitude entre toute figure tracée sur la première et la figure correspondante de la seconde. Au contraire, quelles que soient les deux

surfaces, il existe une infinité de systèmes de projection conservant les angles, et tels, par conséquent, que chaque figure *infiniment petite* et sa représentation soient semblables entre elles. Il en existe une infinité d'autres conservant les aires. Néanmoins ces deux classes de systèmes constituent des exceptions : un mode de projection étant pris au hasard, il arrivera généralement que les angles se trouveront modifiés, si ce n'est en des points particuliers, et que les aires correspondantes n'auront pas entre elles un rapport constant.

Les longueurs seront aussi altérées. Considérons deux courbes qui se correspondent sur les deux surfaces ;

Fig. 1.



soient  $O$  et  $M$  (*fig. 1*) deux points de l'une,  $O'$  et  $M'$  les points correspondants de l'autre, et  $OT$  la tangente en  $O$  à la première courbe. Si le point  $M$  se rapproche indéfiniment du point  $O$ , le point  $M'$  se rapprochera indéfiniment du point  $O'$ , et le rapport de la longueur de l'arc  $O'M'$  à celle de l'arc  $OM$  tendra vers une certaine limite : c'est cette limite que nous appellerons le *rapport de longueurs*, au point  $O$ , sur la courbe  $OM$  ou suivant la direction  $OT$ . Dans un système de projection conservant les angles, le rapport ainsi défini a la même valeur pour toutes les directions qui partent d'un même point, mais il varie avec la position de ce point, à moins que les deux surfaces ne soient applicables l'une sur l'autre. Lorsque la représentation ne conserve les angles

qu'en des points particuliers, le rapport de longueurs en tout autre point change avec la direction.

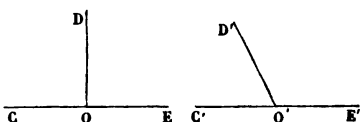
*Loi de la déformation.*

3. La déformation produite autour de chaque point est soumise à une loi qui ne dépend ni de la nature des surfaces ni du mode de projection :

*Toute représentation d'une surface sur une autre peut être remplacée par une infinité de projections orthogonales faites chacune à une échelle convenable.*

Remarquons d'abord qu'il existe toujours en chaque

Fig. 2.



point de la première surface deux tangentes perpendiculaires l'une à l'autre, telles que les directions qui leur correspondent sur la seconde surface se coupent aussi à angle droit. Soient en effet  $CE$  et  $OD$  (*fig. 2*) deux droites perpendiculaires entre elles et tangentes en un point  $O$  à la première surface; soient  $C'E'$  et  $O'D'$  les tangentes correspondantes pour la seconde. Supposons que, des deux angles  $C'O'D$ ,  $D'O'E'$ , le premier soit aigu, et imaginons qu'un angle droit ayant son sommet en  $O$  tourne de gauche à droite, autour de ce point, dans le plan  $CDE$ , en partant de la position  $COD$  pour arriver à la position  $DOE$ . L'angle correspondant, dans le plan tangent en  $O'$  à la seconde surface, se confondra d'abord avec  $C'O'D'$ , et sera aigu; en dernier lieu, il coïncidera avec  $D'O'E'$ , et sera obtus; dans l'intervalle, il aura

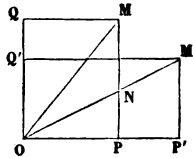


donc été droit. Ainsi il existe un système de deux tangentes satisfaisant à la condition énoncée (<sup>1</sup>).

De cette propriété on conclut que, dans tout mode de représentation, il y a, sur la première des deux surfaces, un système de deux séries de lignes orthogonales dont les projections sur la seconde sont aussi orthogonales. Les deux surfaces se trouvent ainsi décomposées en rectangles infiniment petits qui se correspondent de l'une à l'autre.

Cela posé, soit  $M$  (*fig. 3*) un point infiniment voisin de  $O$ , sur la première surface, et soit  $OPMQ$  celui d'entre les rectangles infiniment petits dont nous venons de par-

Fig. 3.



ler, qui a pour diagonale  $OM$ . Déplaçons la seconde surface, et donnons-lui une position telle que les projections des côtés  $OP$ ,  $OQ$  tombent sur ces côtés eux-mêmes, prolongés s'il est nécessaire; soit alors  $O'P'M'Q'$  le rectangle correspondant à  $OPMQ$ ; appelons  $N$  le point de rencontre des droites  $OM'$  et  $PM$ . On peut considérer ce point comme la projection orthogonale de la position que prendrait  $M$  si l'on faisait tourner d'un angle conve-

(<sup>1</sup>) La démonstration suppose que la représentation n'altère pas la continuité et qu'à deux directions de sens contraires partant du point considéré sur l'une des surfaces correspondent, sur l'autre, deux directions aussi de sens contraires. Il peut donc y avoir exception à la loi de la déformation en certains points particuliers; par exemple, il en sera ainsi aux pôles terrestres quand les angles des méridiens de la carte seront proportionnels à ceux des méridiens du globe sans leur être égaux.

nale, autour de OP, le plan du rectangle OPMQ. Or cet angle, qui ne dépend que du rapport des deux lignes NP, MP, est le même quel que soit M; car, en désignant respectivement par  $a$  et  $b$  les rapports de longueurs suivant les directions OP et OQ, c'est-à-dire en posant  $\frac{OP'}{OP} = a$ ,  $\frac{OQ'}{OQ} = b$ , nous aurons

$$\frac{NP}{M'P'} = \frac{OP}{OP'} = \frac{1}{a}, \quad \frac{MP}{M'P'} = \frac{OQ}{OQ'} = \frac{1}{b},$$

et, par conséquent,

$$\frac{NP}{MP} = \frac{b}{a}.$$

Ainsi déjà, M se déplaçant sur une figure infiniment petite tracée autour du point O, on obtiendra le lieu décrit par N, en faisant tourner cette figure d'un certain angle autour de OP, puis en la projetant orthogonalement sur le plan tangent en O. D'autre part, on a

$$\frac{OM'}{ON} = \frac{OP'}{OP} = a,$$

de sorte que le lieu des points M' est homothétique de celui des points N; le centre d'homothétie est O, et le rapport d'homothétie a pour valeur  $a$ . La représentation de la figure infiniment petite décrite par le point M est donc bien une projection orthogonale de cette figure faite à une échelle convenable <sup>(1)</sup>.

---

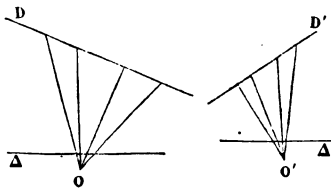
(1) M. Chasles (*Mémoire faisant suite à l'Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie*) distingue, dans les figures homographiques, les relations descriptives et les relations métriques. « Les relations descriptives consistent en ce que à chaque point et à chaque plan de l'une des figures correspondent, dans l'autre, un point et un plan respectivement. Les relations métriques consistent en ce que quatre points en ligne droite, dans la seconde figure, ont

Une carte géographique quelconque, par exemple, peut être considérée comme produite par la juxtaposition des projections orthogonales de tous les éléments

leur rapport anharmonique égal à celui des quatre points de la première figure auxquels ils correspondent. » L'illustre géomètre ajoute d'ailleurs : « Ces relations métriques sont une conséquence des relations descriptives. » Nous allons faire voir que cela résulte immédiatement de la loi que subit la déformation dans la représentation d'une surface sur une autre.

Soient  $D, D'$  (fig. 4) deux droites qui se correspondent dans deux figures homographiques; il s'agit de prouver que le rapport anharmonique de quatre points quelconques de  $D$  et celui des quatre points correspondants de  $D'$  sont égaux. Pour cela, prenons, en dehors des deux droites, deux points correspondants  $O$  et  $O'$  dans les deux figures; joignons le premier aux quatre points de  $D$ , le second aux quatre points de  $D'$ ; puis coupons respectivement les deux faisceaux ainsi obtenus

Fig. 4.



par deux transversales  $\Delta, \Delta'$ , infiniment rapprochées l'une de  $O$ , l'autre de  $O'$ . D'après la loi invoquée plus haut, la figure infiniment petite formée par la portion du faisceau comprise entre  $O'$  et  $\Delta'$  peut s'obtenir en projetant orthogonalement la figure correspondante formée autour du point  $O$ , puis en modifiant, dans un rapport convenable, les dimensions de la projection ainsi obtenue. Aucune de ces deux opérations n'altère le rapport anharmonique des quatre points de  $\Delta$ ; or celui-ci est le même que celui des quatre points de  $D$ ; celui des quatre points de  $\Delta'$  est le même que celui des quatre points de  $D'$ ; donc le rapport anharmonique des quatre points de  $D$  et celui des quatre points de  $D'$  sont égaux.

En résumé, il s'agissait de faire voir que, dans deux figures homographiques, deux faisceaux de droites correspondantes sont homographiques; or c'est ce qui a lieu, puisque, d'après la loi de déformation, l'un est une projection orthogonale de l'autre.

superficiels de la contrée, pourvu que l'on fasse varier de l'un à l'autre, et l'échelle de réduction et la position de l'élément par rapport au plan de la carte.

### *Tangentes principales.*

4. De tous les angles droits qui sont formés par des tangentes issues du point O (*fig. 3*), ceux des lignes OP, OQ et de leurs prolongements sont les seuls dont un côté reste parallèle au plan tangent après la rotation qui a été indiquée tout à l'heure; ce sont donc aussi les seuls qui se projettent suivant des angles droits. Nous pouvons d'après cela compléter le lemme qui a été établi au commencement du troisième paragraphe et énoncer la propriété suivante :

*En chaque point de la surface que l'on veut représenter, il y a deux tangentes perpendiculaires entre elles, et, si les angles ne sont pas conservés, il n'y en a que deux, telles que celles qui leur correspondent sur l'autre surface se coupent aussi à angle droit. De sorte que, sur chacune des deux surfaces, il existe un système de trajectoires orthogonales, et, si le mode de représentation ne conserve pas les angles, il en existe un seul dont les projections sur l'autre surface sont aussi orthogonales.*

Nous appellerons *première* et *seconde tangente principale* les deux tangentes perpendiculaires entre elles dont l'angle n'est pas altéré par la représentation. Nous continuerons à désigner respectivement par *a* et *b* les rapports de longueurs suivant les directions de ces tangentes, et nous supposerons que *a* est le plus grand des deux.

*Ellipse indicatrice.*

5. Si la courbe infiniment petite tracée autour du point O est une circonférence dont il occupe le centre, la représentation de cette courbe sera une ellipse dont les axes se trouveront sur les tangentes principales et auront pour demi-longueurs  $a$  et  $b$ , le rayon de la circonférence étant pris pour unité. Cette ellipse constitue en chaque point une sorte d'*indicatrice* du système de projection (<sup>1</sup>).

(<sup>1</sup>) Imaginons que l'on effectue deux décompositions de l'espace en parallélépipèdes infiniment petits, chacune au moyen de trois séries de surfaces, et faisons correspondre les surfaces qui opèrent l'une respectivement à celles qui opèrent l'autre. Dans la représentation ainsi obtenue, la loi de la déformation sera la suivante :

*Toute sphère infiniment petite est remplacée, par un ellipsoïde.*

Soient en effet O et O' deux points correspondants, M un point infiniment voisin de O, M' la projection de M. Considérons trois axes  $ox, oy, oz$  perpendiculaires entre eux et les directions correspondantes  $o'x', o'y', o'z'$ ; soient  $x, y, z$  les coordonnées de M par rapport à  $ox, oy, oz$ ; soient  $x', y', z'$  celles de M' par rapport à  $o'x', o'y', o'z'$ . Prenons la distance OM pour unité, et appelons  $g, h, k$  les rapports de longueurs, suivant  $ox, oy, oz$ ; nous aurons

$$x' = gx, \quad y' = hy, \quad z' = kz.$$

D'ailleurs l'équation de la sphère qui a pour centre le point O et pour rayon OM est

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Le lieu des projections des divers points de cette sphère sera donc fourni par l'équation

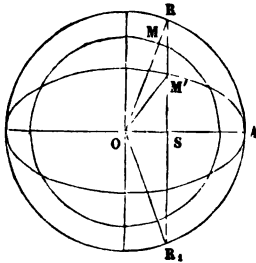
$$\frac{x'^2}{g^2} + \frac{y'^2}{h^2} + \frac{z'^2}{k^2} = 1,$$

qui représente un ellipsoïde rapporté à trois diamètres conjugués.

Les plans principaux et les axes de l'ellipsoïde fourniront ici des propriétés analogues à celles des tangentes principales dans la représentation d'une surface sur une autre, et il serait facile d'établir les formules nécessaires à l'étude de la déformation autour de chaque point.

Au lieu de projeter orthogonalement la circonférence lieu des points  $M$  (*fig. 3*), ce qui donne l'ellipse lieu des points  $N$ , puis d'agrandir celle-ci dans le rapport de  $a$  à l'unité, ce qui donne le lieu des points  $M'$ , on peut effectuer les deux opérations dans l'ordre inverse. On obtiendra donc le point  $M'$  (*fig. 5*) de l'ellipse indicatrice qui correspond à un point donné  $M$  du cercle, en prolongeant le rayon  $OM$  jusqu'à sa rencontre en  $R$  avec la circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre, en abaissant du point d'intersection  $R$  une perpendiculaire  $RS$  sur la direction  $OA$  du grand axe, puis réduisant cette perpendiculaire, à partir de son

Fig. 5.



pied  $S$ , dans le rapport de  $b$  à  $a$ ; l'extrémité  $M'$  de la portion  $SM'$  ainsi obtenue sera le point cherché.

### *Altérations d'angles.*

6. Tirons  $OM'$  (*fig. 5*), et appelons respectivement  $u$ ,  $u'$  les angles  $\angle AOM$ ,  $\angle AOM'$  qui se correspondent sur les deux surfaces. Comme le second est le plus petit des deux, on voit que la représentation diminue tous les angles aigus dont l'un des côtés coïncide avec la première tangente principale. Entre  $u$  et  $u'$ , on a d'ailleurs

la relation

$$\text{tang } u' = \frac{b}{a} \text{ tang } u.$$

7. Prolongeons la ligne RS d'une longueur égale à elle-même au-dessous de OA, et joignons le point O à l'extrémité R<sub>1</sub> du prolongement. Les deux triangles ORM', OR<sub>1</sub>M' donnent

$$\sin(u - u') = \frac{a - b}{a + b} \sin(u + u').$$

L'angle  $u$  augmentant de zéro à  $\frac{\pi}{2}$ , son altération  $u - u'$  augmente de zéro jusqu'à une certaine valeur  $\omega$ , puis diminue jusqu'à zéro. Le *maximum* se produit au moment où la somme  $u + u'$  devient égale à  $\frac{\pi}{2}$ . Soient U et U' les valeurs correspondantes de  $u$  et de  $u'$ ; comme elles doivent satisfaire à l'équation du n° 6, on aura

$$\text{tang } U = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \text{tang } U' = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Quant à  $\omega$ , on peut le calculer par l'une des formules

$$\sin \omega = \frac{a - b}{a + b}, \quad \cos \omega = \frac{2\sqrt{ab}}{a + b},$$

$$\text{tang } \omega = \frac{a - b}{2\sqrt{ab}}, \quad \text{tang } \frac{\omega}{2} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}},$$

$$\text{tang} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2} \right) = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \text{tang} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2} \right) = \sqrt{\frac{b}{a}},$$

dont les deux dernières proviennent de ce que, la somme de U et de U' étant égale à  $\frac{\pi}{2}$  et leur différence à  $\omega$ , on a

$$U = \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}, \quad U' = \frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2}.$$

8. Pour que l'équation du n° 6 reste satisfaite quand on y change  $u$  en  $\frac{\pi}{2} - u'$ , il suffit d'y remplacer  $u'$  par  $\frac{\pi}{2} - u$ . Les mêmes substitutions, effectuées dans  $u + u'$ , donnent pour résultat  $\pi - (u + u')$ , de sorte que la première formule du n° 7 fait retomber sur la même valeur de l'altération. Ainsi, des deux angles qui se trouvent modifiés de quantités égales, chacun est le complément de la projection de l'autre.

9. Si l'on veut calculer directement l'altération éprouvée par l'angle donné  $u$ , on se servira de l'une des deux formules

$$\begin{aligned} \text{tang}(u - u') &= \frac{(a - b) \text{tang} u}{a + b \text{tang}^2 u}, \\ \text{tang}(u - u') &= \frac{(a - b) \sin 2u}{a + b + (a - b) \cos 2u}, \end{aligned}$$

qui se déduisent immédiatement de l'équation du n° 6.

10. Considérons maintenant un angle  $MON$  (*fig. 6* et *7*) qui n'ait pour côtés ni l'une ni l'autre des tan-

Fig. 6.

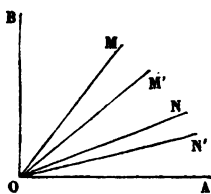
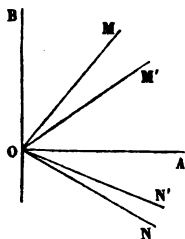


Fig. 7.



gentes principales  $OA, OB$ . Nous pouvons supposer les deux directions  $OM, ON$  à droite de  $OB$ , et l'une d'elles  $OM$  au-dessus de  $OA$ . Suivant que l'autre,  $ON$ , sera au-dessus de  $OA$  (*fig. 6*), ou au-dessous (*fig. 7*), on calcu-



lera l'angle correspondant  $M'ON'$  en faisant la somme ou la différence des angles  $AOM'$ ,  $AON'$ , lesquels seront donnés par la formule du n° 6. L'altération  $MON - M'ON'$  sera aussi, dans le premier cas, la différence, et, dans le second, la somme des altérations éprouvées par les angles  $AOM$ ,  $AON$ .

11. Quand l'angle  $AON$  (*fig. 6*) est égal à  $BOM'$ , on sait que son altération est la même que celle de l'angle  $AOM$ , de sorte que l'angle  $MON$  se trouve alors reproduit en vraie grandeur par l'angle  $M'ON'$ . Ainsi, à toute direction donnée, on peut en accoupler une autre, et une seule, telle que leur angle se conserve en projection. Cependant la seconde direction se confond avec la première lorsque celle-ci fait avec  $OA$  l'angle que nous avons désigné par  $U$ .

12. L'angle le plus altéré est celui que forme cette dernière direction avec sa symétrique par rapport à  $OA$ ; il se trouve remplacé, sur la projection, par son supplément. Le *maximum* d'altération ainsi produit est égal à  $2\omega$ . Il ne peut jamais se rapporter à deux directions perpendiculaires entre elles.

#### *Altérations de longueurs.*

13. La longueur  $OM$  (*fig. 5*) ayant été prise pour unité, le rapport de longueurs suivant la direction  $OM$  est mesuré par  $OM'$ . Désignons par  $r$  ce rapport; nous pourrons le calculer au moyen de l'une des formules

$$r \cos u' = a \cos u, \quad r \sin u' = b \sin u, \quad r^2 = a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u.$$

On a aussi, entre  $r$ ,  $u$  et l'altération  $u - u'$  de l'angle  $u$ , la relation

$$2 r \sin(u - u') = (a - b) \sin 2u,$$

qui exprime que, dans le triangle ORM', les sinus de deux des angles sont entre eux comme les côtés opposés.

14. Le *maximum* et le *minimum* de  $r$  correspondent aux tangentes principales, et sont respectivement  $a$  et  $b$ .

15. Appelons  $r$  et  $r_1$  les rapports de longueurs suivant deux directions perpendiculaires entre elles, et soit  $\theta$  l'altération qu'éprouve l'angle droit formé par ces deux directions. Il est facile de voir que l'on aura

$$r^2 + r_1^2 = a^2 + b^2, \quad rr_1 \cos \theta = ab,$$

ainsi que cela résulte d'ailleurs des propriétés des diamètres conjugués dans l'ellipse.

16. Pour tous les angles non modifiés par la représentation, le produit des rapports de longueurs suivant leurs côtés est le même.

En effet, soient OA (*fig. 6*) et OB les deux tangentes principales; soient MON un angle quelconque et M'ON' sa projection. Désignons respectivement par  $r$  et  $r_1$  les rapports de longueurs suivant OM et ON, par  $u$  et  $u'$  les angles AOM et AOM', il viendra

$$r \cos u' = a \cos u, \quad r_1 \sin AON' = b \sin AON;$$

mais on sait que, si l'altération MON — M'ON' est nulle, l'angle AON est le complément de  $u'$ , et l'angle AON' celui de  $u$ , de sorte que la seconde équation donne

$$r_1 \cos u = b \cos u'.$$

En multipliant celle-ci et la première membre à membre, on obtient

$$rr_1 = ab,$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

17. Il résulte de cette propriété que les rapports de longueurs suivant les deux directions dont l'angle subit l'altération *maxima* est égal à  $\sqrt{ab}$ ; car l'angle non altéré qui a pour côté l'une de ces deux lignes se réduit à zéro, et a la même ligne pour second côté (n° 11).

*Altérations de surfaces.*

18. Le rapport dans lequel un élément superficiel se trouve modifié par la représentation n'est autre que celui du rectangle  $OPM'Q'$  (*fig. 3*) au rectangle  $OPMQ$ , ou encore celui de l'aire de l'ellipse indicatrice à l'aire du cercle; il est donc égal à  $ab$ .

19. Lorsque les deux aires sont équivalentes, on a

$$b = \frac{1}{a}, \quad \text{tang } \omega = \frac{1}{2} \left( a - \frac{1}{a} \right),$$

$$\text{tang } \frac{\omega}{2} = \frac{a-1}{a+1}, \quad \text{tang } \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2} \right) = a.$$

Les deux éléments linéaires dont l'angle est le plus altéré conservent alors leurs longueurs.

*Détermination des axes de l'ellipse indicatrice.*

20. Pour appliquer les formules ci-dessus à l'étude de la déformation produite autour de chaque point par un mode de projection suffisamment défini, il faut au préalable déterminer les longueurs et les directions des axes de l'ellipse indicatrice.

Supposons les deux surfaces rapportées à un même système ou à deux systèmes d'axes perpendiculaires entre eux; soient  $x, y, z$  les coordonnées d'un point quelconque de l'une,  $x', y', z'$  celles du point correspondant de l'autre,  $l$  et  $m$  deux paramètres variables.

On peut définir le mode de représentation en égalant les six coordonnées à des fonctions convenablement choisies de  $l$  et de  $m$ . Pour chaque couple de valeurs attribuées aux deux paramètres, on obtiendra un point de la première surface et la projection de ce point. Pour chaque valeur attribuée à un seul des paramètres, l'autre restant variable, on obtiendra une courbe du premier canevas et la courbe correspondante du second. Si l'on pose

$$L = \left[ \left( \frac{dx}{dl} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dl} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dl} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$L' = \left[ \left( \frac{dx'}{dl} \right)^2 + \left( \frac{dy'}{dl} \right)^2 + \left( \frac{dz'}{dl} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$M = \left[ \left( \frac{dx}{dm} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dm} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dm} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$M' = \left[ \left( \frac{dx'}{dm} \right)^2 + \left( \frac{dy'}{dm} \right)^2 + \left( \frac{dz'}{dm} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

les longueurs des côtés de deux parallélogrammes infiniment petits se correspondant sur les deux canevas seront, pour l'un,  $Ldl$  et  $Mdm$ , pour l'autre,  $L'dl$  et  $M'dm$ . En appelant  $h$  et  $k$  les rapports de ces côtés,  $\Theta$  et  $\Theta'$  leurs angles, on aura

$$h = \frac{L'}{L}, \quad k = \frac{M'}{M},$$

$$\cos \Theta = \frac{1}{LM} \left[ \left( \frac{dx}{dl} \right) \left( \frac{dx}{dm} \right) + \left( \frac{dy}{dl} \right) \left( \frac{dy}{dm} \right) + \left( \frac{dz}{dl} \right) \left( \frac{dz}{dm} \right) \right],$$

$$\cos \Theta' = \frac{1}{L'M'} \left[ \left( \frac{dx'}{dl} \right) \left( \frac{dx'}{dm} \right) + \left( \frac{dy'}{dl} \right) \left( \frac{dy'}{dm} \right) + \left( \frac{dz'}{dl} \right) \left( \frac{dz'}{dm} \right) \right],$$

de sorte que  $h$ ,  $k$ ,  $\Theta$  et  $\Theta'$  sont connus en fonction de  $l$  et de  $m$ .

Dans un grand nombre d'applications, notamment dans celles qui auront pour objet les cartes géographiques, il sera inutile d'exprimer les six coordonnées

rectangulaires en fonction de  $l$  et de  $m$ , et la nature des surfaces ainsi que celle du mode de projection permettront de remplacer les formules qui précèdent par d'autres plus simples. En tout cas, nous pouvons maintenant considérer comme donnés, pour chaque point de la première surface, les deux angles adjacents supplémentaires,  $\Theta, \pi - \Theta$ , de deux éléments linéaires, leurs projections,  $\Theta', \pi - \Theta'$ , et les rapports de longueurs,  $h, k$ , suivant les directions de ces éléments.

21. Des deux angles donnés, l'un est traversé par la première tangente principale; nous verrons plus loin comment on peut le distinguer de l'autre; c'est lui que nous désignerons par  $\Theta$ ; appelons  $u$  et  $v$  les deux parties dans lesquelles il se trouve ainsi décomposé,  $u$  étant celle des deux qui est formée par la tangente principale et la direction suivant laquelle le rapport de longueurs est  $h$ ; soient  $u'$  et  $v'$  les portions correspondantes de  $\Theta'$ . Si, pour fixer les idées, nous supposons  $h > k$ , l'angle  $u$  sera nécessairement aigu et même plus petit que  $v$  et que  $\pi - v$ ; quant à  $v$ , il pourra être aigu ou obtus. D'après les formules du n° 12, on a

$$\begin{aligned} u + v &= \Theta, & a \cos u &= h \cos u', & a \cos v &= k \cos v', \\ u' + v' &= \Theta', & b \sin u &= h \sin u', & b \sin v &= k \sin v'; \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} ab \sin \Theta &= hk \sin \Theta', \\ (a^2 + b^2) \sin^2 \Theta &= h^2 + k^2 - 2hk \cos \Theta \cos \Theta', \end{aligned}$$

ou bien encore

$$\begin{aligned} (a + b)^2 \sin^2 \Theta &= h^2 + k^2 - 2hk \cos(\Theta + \Theta'), \\ (a - b)^2 \sin^2 \Theta &= h^2 + k^2 - 2hk \cos(\Theta - \Theta'). \end{aligned}$$

Ces équations ne changent pas lorsqu'on y remplace à la fois  $\Theta$  par  $\pi - \Theta$ , et  $\Theta'$  par  $\pi - \Theta'$ ; elles fourniront

donc  $a$  et  $b$  sans qu'il soit besoin de savoir quel est celui des deux angles donnés à l'intérieur duquel passe la première tangente principale. Il vient ensuite, pour le calcul de  $u$  et de  $v$ ,

$$\begin{aligned} \sin u &= \sqrt{\frac{a^2 - h^2}{a^2 - b^2}}, & \sin v &= \sqrt{\frac{a^2 - k^2}{a^2 - b^2}}, \\ \cos u &= \sqrt{\frac{h^2 - b^2}{a^2 - b^2}}, & \cos v &= \pm \sqrt{\frac{k^2 - b^2}{a^2 - b^2}}, \\ \text{tang } u &= \sqrt{\frac{a^2 - h^2}{h^2 - b^2}}, & \text{tang } v &= \pm \sqrt{\frac{a^2 - k^2}{k^2 - b^2}}. \end{aligned}$$

Pour déterminer complètement la direction de la première tangente principale, il reste encore à choisir, relativement à  $\Theta$ , entre deux angles supplémentaires donnés, et, relativement à  $\nu$ , entre deux valeurs supplémentaires fournies par les trois dernières formules. On lèvera immédiatement toute indécision en cherchant quelle est celle de ces deux valeurs qui, ajoutée à  $u$ , produit une somme égale à l'un des deux angles donnés; en effet, l'équation  $u + \nu = \Theta$  est incompatible avec chacune de celles que l'on formerait en  $\nu$  remplaçant soit  $\Theta$  par  $\pi - \Theta$ , soit  $\nu$  par  $\pi - \nu$ , soit en même temps  $\Theta$  par  $\pi - \Theta$  et  $\nu$  par  $\pi - \nu$ , à moins cependant que l'on n'ait  $\Theta = \frac{\pi}{2}$ , ou  $\nu = \frac{\pi}{2}$ , ou  $u = 0$ ; mais ces trois cas particuliers, qui ne comportent d'ailleurs aucune incertitude, se trouvent parmi ceux que nous allons examiner. Remarquons encore que, si  $\nu$  est obtus,  $\Theta$  sera à plus forte raison obtus, et que, si  $\nu$  est aigu,  $\Theta$  sera aigu ou obtus, suivant que  $a^2 + b^2$  se trouvera plus petit ou plus grand que  $h^2 + k^2$ .

22. Lorsque les deux angles supplémentaires qui sont donnés sur la première surface n'éprouvent pas d'altéra-

tion, c'est-à-dire pour  $\Theta' = \Theta$ , les équations qui fournissent les demi-axes de l'ellipse indicatrice se réduisent à

$$ab = hk, \quad (a - b) \sin \Theta = h - k.$$

Lorsque les mêmes angles se changent l'un dans l'autre par l'effet de la représentation, c'est-à-dire pour  $\Theta' = \pi - \Theta$ , les équations deviennent

$$ab = hk, \quad (a + b) \sin \Theta = h + k.$$

Quand les angles sont droits, c'est-à-dire pour  $\Theta = \frac{\pi}{2}$ , les formules générales se ramènent à celles qui expriment les propriétés des diamètres conjugués dans l'ellipse indicatrice. Alors  $u$  et  $v$  sont complémentaires, et la première tangente principale se dirige à l'intérieur de celui des deux angles droits donnés qui a pour projection un angle aigu.

Quand les rapports de longueurs suivant les directions des deux éléments linéaires sont égaux, c'est-à-dire pour  $h = k$ , on a

$$a = h \frac{\cos \frac{\Theta'}{2}}{\cos \frac{\Theta}{2}}, \quad b = h \frac{\sin \frac{\Theta'}{2}}{\sin \frac{\Theta}{2}};$$

la première tangente principale est bissectrice de celui des deux angles donnés qui se trouve diminué en projection.

Si les mêmes rapports sont liés à  $\Theta$  et à  $\Theta'$  par la relation

$$h \cos \Theta = k \cos \Theta',$$

il viendra

$$a = h, \quad b = k \frac{\sin \Theta'}{\sin \Theta},$$

et la première tangente principale coïncidera avec la direction suivant laquelle le rapport de longueur est  $h$ .

Si les données satisfont à la condition

$$h \cos \Theta' = k \cos \Theta,$$

il viendra

$$a = h \frac{\sin \Theta'}{\sin \Theta}, \quad b = k,$$

et la première tangente principale sera perpendiculaire à la direction suivant laquelle le rapport des longueurs est  $k$ .

Dans le cas où l'on aurait à la fois  $h = k$ ,  $\Theta' = \Theta$ , tous les angles seraient conservés, et tous les rapports de longueur seraient égaux entre eux. L'ellipse indicatrice serait un cercle. Une figure infiniment petite de forme quelconque, tracée autour du point que l'on considère, et sa projection seraient semblables.

Enfin, le cas où l'on aurait en même temps  $h = k$ ,  $\Theta' = \pi - \Theta$ , est celui où les deux angles donnés éprouveraient le *maximum* d'altération. La première tangente principale, sur la surface à représenter, serait bissectrice de celui de ces deux angles qui est obtus, et il viendrait

$$a = h \operatorname{tang} \frac{\Theta}{2}, \quad b = h \operatorname{cot} \frac{\Theta}{2}.$$

*Formules dans lesquelles les directions se trouvent rapportées à d'autres lignes que les tangentes principales.*

23. Ayant déterminé en grandeur et en direction les axes de l'ellipse indicatrice, on pourra calculer les diverses altérations d'angles et de longueurs par les formules des numéros 6 à 19. Mais on peut aussi arriver à ce but en partant immédiatement des données  $\Theta$ ,  $\Theta'$ ,  $h$  et  $k$ . Soit  $\varphi$  l'angle d'une direction quelconque avec le



côté de  $\Theta$  suivant lequel le rapport des longueurs est  $h$ ; soit  $\varphi'$  sa projection; soit  $r$  le rapport de longueurs suivant la direction considérée. La relation analogue à

$$hk \sin \Theta' = ab \sin \Theta$$

est ici

$$hr \sin \varphi' = ab \sin \varphi;$$

si l'on multiplie en croix, on trouvera

$$r \sin \Theta \sin \varphi' = k \sin \Theta' \sin \varphi.$$

On a de même

$$r \sin \Theta \sin (\Theta' - \varphi') = h \sin \Theta' \sin (\Theta - \varphi).$$

Des deux dernières équations, il est facile de tirer  $\varphi'$  et  $r$  en fonction des données et de l'angle  $\varphi$ .

Quant au rapport des éléments superficiels, il est  $\frac{hk \sin \Theta'}{\sin \Theta}$ .

24. Ces formules conduisent à des relations très-simples lorsque les directions se trouvent rapportées à l'une des deux droites dont l'angle éprouve le *maximum* d'altération. Ce *maximum* étant représenté, comme plus haut (n° 7), par  $2\omega$ , ou l'angle lui-même par  $\frac{\pi}{2} + \omega$ , appelons  $c$  le rapport de longueurs sur les deux droites; soit  $\psi$  l'angle que l'une d'elles fait avec une direction quelconque, et soit  $\psi'$  la projection de  $\psi$ . Il viendra

$$\cot \psi' - \cot \psi = 2 \operatorname{tang} \omega,$$

$$r \sin \psi' = c \sin \psi,$$

$$\operatorname{tang}(\psi' + \omega) - \operatorname{tang}(\psi - \omega) = 2 \operatorname{tang} \omega,$$

$$r \cos(\psi' + \omega) = c \cos(\psi - \omega).$$

Le rapport des éléments superficiels est  $c^2$ .

*Séries de couples de courbes satisfaisant à certaines conditions.*

25. Nous avons vu (n° 4) que, dans tout mode de représentation où les angles ne sont pas conservés, il existe, sur chacune des deux surfaces, un système unique de deux séries de lignes se coupant à angle droit et dont les projections sur l'autre surface se coupent aussi à angle droit. En chaque point, le rapport de longueurs a son *maximum* et son *minimum* sur les deux lignes de séries différentes qui viennent s'y rencontrer (n° 14). On peut se proposer de déterminer les courbes qui appartiennent à l'une ou à l'autre série. On peut aussi chercher les deux séries de courbes dont les intersections produisent en chaque point l'angle qui éprouve la plus grande altération (n° 12); on sait que, sur chacune, le rapport de longueurs est constamment égal à la moyenne géométrique entre ses valeurs *maxima* et *minima* (n° 17), de sorte que, si le mode de projection conserve les aires, ces courbes se trouveront projetées en vraie grandeur. Plus généralement, on peut se proposer de déterminer les courbes sur lesquelles le rapport de longueurs varie suivant une loi donnée, ainsi que les systèmes de courbes dont les intersections produisent, sur l'une et l'autre surface, des angles variant aussi d'après une loi donnée.

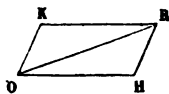
26. Les coordonnées  $l$  et  $m$ , dont nous avons fait usage jusqu'à présent, définissent respectivement deux séries de courbes tracées sur la première surface, ainsi que leurs projections sur la seconde; les deux mêmes séries de couples de courbes se trouveront également définies par deux coordonnées, fonctions, l'une de  $l$  seu-

lement, l'autre de  $m$  seulement, les deux fonctions étant du reste arbitraires; enfin, pour caractériser une troisième série de couples de courbes, on peut avoir recours à un troisième paramètre variable,  $p$ , ou à une fonction arbitraire de ce paramètre : dans les questions qui ont été énoncées tout à l'heure, il s'agit de déterminer  $p$  en fonction de  $l$  et de  $m$ , de manière que les nouvelles courbes remplissent certaines conditions. Ainsi effectuée, la recherche de ces courbes dépendrait d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre dont la forme se trouve suffisamment indiquée par ce qui précède; on voit en effet qu'elle serait privée de second membre, et que sa résolution se ramènerait à l'intégration de l'équation différentielle  $dp = 0$  et à celle d'une autre équation différentielle entre  $l$  et  $m$  seulement; cette dernière, qui exprime que, pour tous les points de chaque courbe et pour leurs projections, la fonction de  $l$  et de  $m$  qui représente  $p$  reste constante peut servir aussi bien que  $p$  à caractériser les deux séries de couples de courbes; la méthode que nous suivrons consistera à la chercher directement. Si l'on voulait ensuite avoir  $p$ , il faudrait, ou intégrer et résoudre par rapport à la constante, ou faire passer tous les termes dans un seul membre et multiplier leur ensemble par l'un des facteurs qui le rend différentielle exacte, ce qui donnerait l'expression de  $dp$ . Ainsi envisagées, les questions que nous voulons résoudre se trouvent ramenées à la suivante.

27. Considérons, sur une seule des deux surfaces, le canevas de parallélogrammes infiniment petits formés par les deux séries de courbes qui correspondent respectivement aux coordonnées  $l$  et  $m$ , et supposons qu'il s'agisse de trouver une troisième série de courbes cou-

pant celles de la seconde série sous un angle variable  $\varphi$ , connu en fonction des coordonnées  $l$  et  $m$  du point d'intersection. Soit OR (fig. 8) un élément infiniment petit

Fig. 8.



de l'une des courbes de la troisième série, et OHRK le parallélogramme du canevas qui a pour diagonale OR. On aura, d'après la notation déjà adoptée (n° 20)

$$OH = L dl, \quad OK = M dm, \quad HOR = \varphi, \quad KOR = \theta - \varphi;$$

mais le triangle OHR donne

$$OH \sin HOR = HR \sin ORH;$$

il vient donc

$$L \sin \varphi dl - M \sin(\theta - \varphi) dm = 0;$$

telle est l'équation différentielle des courbes cherchées, pour le cas où  $l$  et  $m$  varient dans le même sens lorsqu'on se déplace sur OR; dans le cas contraire, il faudrait changer le signe du second terme; l'équation précédente s'appliquera cependant à tous les cas si  $\theta$  représente celui des quatre angles sur les côtés duquel  $l$  et  $m$  vont en augmentant, et si  $\varphi$  est compté positivement à partir du premier de ces côtés, et dans le sens de la rotation du premier vers le second.

28. Cela posé, si l'on veut avoir les équations différentielles des deux séries de lignes qui sont orthogonales sur l'une et l'autre surface, il suffira d'imaginer que OR se confond successivement avec les deux tangentes principales qui partent du point O, ce qui revient à remplacer  $\varphi$  par  $u$ , puis par  $\frac{\pi}{2} + u$ , l'angle  $u$  étant celui qui se

trouve donné, en fonction de  $l$  et de  $m$ , par les formules du n° 21; les valeurs correspondantes de  $\Theta - \varphi$  sont respectivement  $\nu$  et  $\nu - \frac{\pi}{2}$ ; de sorte que les deux séries de couples de lignes orthogonales seront fournies par les équations différentielles

$$L \sin u \, dl - M \sin \nu \, dm = 0, \quad L \cos u \, dl + M \cos \nu \, dm = 0.$$

29. S'il s'agit des lignes dont l'angle éprouve en chaque point l'altération *maxima*, il faudra faire successivement  $\varphi = u + U$ ,  $\Theta - \varphi = \nu - U$ , et  $\varphi = u - U$ ,  $\Theta - \varphi = \nu + U$ , les angles  $u$  et  $\nu$  étant, comme tout à l'heure, ceux du n° 21, et  $U$  l'angle du n° 7 pour lequel on a

$$\text{tang} U = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

En effectuant les substitutions, on obtient les équations différentielles

$$L \sin(U + u) \, dl + M \sin(U - \nu) \, dm = 0,$$

$$L \sin(U - u) \, dl + M \sin(U + \nu) \, dm = 0.$$

30. Lorsque le canevas primitif a ses angles droits sur la première surface, les équations des lignes qui sont orthogonales à la fois sur la première et sur la seconde deviennent

$$L \text{tang} u \, dl - M \, dm = 0, \quad L \cot u \, dl + M \, dm = 0,$$

et celles des lignes dont l'angle subit le maximum d'altération,

$$L \text{tang}(U + u) \, dl - M \, dm = 0,$$

$$L \text{tang}(U - u) \, dl + M \, dm = 0.$$

Celles-ci se simplifieront encore si, ayant déterminé préalablement les coordonnées  $p$  et  $q$  des deux séries de lignes qui sont orthogonales sur les deux surfaces, on en

fait usage, au lieu d'employer les coordonnées  $l$  et  $m$  du canevas primitif; on aura alors  $u = 0$ , et les dernières équations se réduiront à

$$P\sqrt{a} dp - Q\sqrt{b} dq = 0, \quad P\sqrt{a} dp + Q\sqrt{b} dq = 0,$$

$P$  et  $Q$  représentant les coefficients de  $dp$  et de  $dq$  dans les expressions des côtés des rectangles infiniment petits qui composent le nouveau canevas sur la première surface.

Il suit de là que, dans le même système de coordonnées, et pour un mode de représentation conservant les surfaces, les équations des lignes qui se projettent en vraie grandeur sont

$$aP dp - Q dq = 0, \quad aP dp + Q dq = 0.$$

31. Dans les questions précédentes, nous n'avons considéré que des valeurs particulières du rapport de longueurs; supposons maintenant que l'on veuille déterminer les deux séries de courbes sur lesquelles il se trouve donné par une fonction connue  $h$ , de  $l$  et de  $m$ . Soit  $u_1$ , l'un des deux angles, égaux entre eux, que la première tangente principale fait, en un point quelconque, avec les deux courbes de séries différentes qui viennent s'y rencontrer; nous obtiendrons cet angle en remplaçant, dans l'une des trois formules en  $a$ ,  $b$ ,  $h$  et  $u$  du n° 21,  $h$  par  $h_1$ , et  $u$  par  $u_1$ . Les valeurs de  $\varphi$  pour les deux séries de courbes sont d'ailleurs  $u + u_1$  et  $u - u_1$ . Les équations différentielles que l'on cherche peuvent donc s'écrire immédiatement.

32. Enfin, soit proposé de trouver deux séries de courbes se coupant, ainsi que leurs projections, sous des angles exprimés par deux fonctions connues des coordonnées de chaque point d'intersection. Des formules du

n° 21, il résulte que les expressions

$$\frac{hk \sin \Theta'}{\sin \Theta}, \quad \frac{h^2 + k^2 - 2hk \cos \Theta \cos \Theta'}{\sin^2 \Theta}$$

sont des invariants du mode de représentation employé, de sorte que, si  $\Theta$  et  $\Theta'$  sont donnés,  $h$  et  $k$  le seront aussi; la question actuelle se ramène donc à la précédente. Elle admet deux solutions, à moins que les angles donnés ne soient droits.

*Doubles canevas satisfaisant à certaines conditions.*

33. Un double canevas formé par deux séries de lignes sur l'une des surfaces et par leurs projections sur l'autre peut être défini par deux coordonnées,  $l$  et  $m$ , convenablement choisies parmi celles qui correspondent respectivement à ces deux séries de lignes. Si l'on substitue à  $l$  une fonction de  $l$  et à  $m$  une fonction de  $m$ , on obtiendra un double canevas différent du premier, mais ayant les mêmes angles. Par exemple, bien qu'il n'existe, pour un mode de représentation donné, que deux séries de couples de lignes orthogonales, il y a une infinité de doubles canevas orthogonaux, dont les coordonnées sont respectivement des fonctions arbitraires des coordonnées de l'un d'entre eux. Ce qui varie de l'un à l'autre, c'est le rapport des deux côtés de chaque rectangle infiniment petit; il varie toutefois de telle manière que le quotient des valeurs qu'il prend pour deux rectangles correspondants sur les deux surfaces soit constamment égal à  $\frac{b}{a}$ . De cette dernière remarque, il résulte que l'on ne saurait profiter de l'indétermination des fonctions arbitraires pour assigner à ces deux rectangles des formes déterminées; et même, sur une seule des deux surfaces, on ne pourra faire varier le rap-

port dès deux côtés de chaque rectangle suivant une loi donnée qu'autant que la fonction des coordonnées qui exprime cette loi remplira une certaine condition, qu'il serait facile d'établir.

34. Si  $l$  et  $m$  sont les coordonnées d'un double canevas,  $l + m$  et  $l - m$  seront celles du double canevas que formeraient les diagonales des parallélogrammes du premier. En effet, pour l'une des diagonales, le rapport de  $\sin \varphi$  à  $\sin (\Theta - \varphi)$ , qui figure dans l'équation différentielle du n° 27, est égal à  $\frac{M}{L}$ , et pour l'autre à  $-\frac{M}{L}$ , de sorte que cette équation donne successivement, pour les deux séries de couples de courbes du nouveau canevas,

$$dl - dm = 0, \quad dl + dm = 0.$$

Lorsque le premier canevas se composera de rectangles, le second sera formé de losanges, et réciproquement.

Cela posé, appelons  $\Phi$  et  $\Psi$  deux fonctions arbitraires, et soient  $p$  et  $q$  les coordonnées d'un double canevas orthogonal; celles des autres canevas de rectangles seront  $\Phi(p)$  et  $\Psi(q)$ ; celles des doubles canevas de losanges seront  $\Phi(p) + \Psi(q)$  et  $\Phi(p) - \Psi(q)$ .

De même, soient  $r$  et  $s$  les coordonnées d'un double canevas de losanges; celles des doubles canevas orthogonaux seront  $\Phi(r + s)$  et  $\Psi(r - s)$ ; celles des doubles canevas de losanges seront

$$\Phi(r + s) + \Psi(r - s) \quad \text{et} \quad \Phi(r + s) - \Psi(r - s).$$

Les tangentes principales sont bissectrices des angles de chaque double canevas de losanges; de plus, si l'on appelle  $\Omega$  et  $\Omega'$  deux de ces angles se correspondant d'une surface à l'autre dans le double canevas qui a pour



coordonnées  $\Phi(p) + \Psi(q)$ ,  $\Phi(p) - \Psi(q)$ , il viendra

$$\operatorname{tang} \frac{\Omega}{2} = \frac{Q}{P} \frac{\Phi'(p)}{\Psi'(q)}, \quad \operatorname{tang} \frac{\Omega'}{2} = \frac{bQ}{aP} \frac{\Phi'(p)}{\Psi'(q)};$$

$P$  et  $Q$  désignant, comme précédemment, les coefficients de  $dp$  et de  $dq$  dans les expressions des côtés de chaque rectangle infiniment petit du double canevas orthogonal défini par les coordonnées  $p$  et  $q$ . On voit qu'en général il ne sera pas possible de disposer des deux fonctions arbitraires de manière que les angles des losanges varient suivant une loi donnée, même sur une seule des deux surfaces.

Dans les doubles canevas formés par les lignes dont l'angle éprouve en chaque point la plus grande altération, les demi-angles des parallélogrammes ont pour tangentes  $\sqrt{\frac{a}{b}}$  sur l'une des surfaces, et  $\sqrt{\frac{b}{a}}$  sur l'autre. Pour que l'un d'eux soit composé de losanges sur la première surface, il faut que  $\frac{a}{b}$  soit le produit de  $\frac{Q}{P}$ , qui est une fonction donnée de  $p$  et de  $q$ , par deux autres fonctions, l'une de  $p$  seulement, l'autre de  $q$  seulement. Alors le canevas sera aussi formé de losanges sur la seconde surface.

35. Lorsque le rapport de  $P$  à  $Q$  est le produit d'une fonction de  $p$  par une fonction de  $q$ , on peut choisir  $\Phi$  et  $\Psi$ , de manière que l'on ait

$$\frac{P}{\Phi'(p)} = \frac{Q}{\Psi'(q)},$$

ce qui, d'une part, rendra égaux les coefficients des différentielles des coordonnées dans les expressions des longueurs des côtés des rectangles déterminés sur la première surface par le double canevas orthogonal répendant

à  $\Phi(p)$  et  $\Psi(q)$ , et, d'autre part, donnera  $\Omega = \frac{\pi}{2}$  pour le double canevas de losanges répondant à  $\Phi(p) + \Psi(q)$  et  $\Phi(p) - \Psi(q)$ . Il y aura donc alors un double canevas orthogonal et un double canevas de losanges décomposant la première surface en carrés; l'un sera formé par les diagonales de l'autre.

La condition analogue pour la seconde surface porterait sur  $aP$  et  $bQ$ .

Il ne peut y avoir de double canevas décomposant à la fois les deux surfaces en carrés, à moins que le mode de projection ne conserve les angles.

### *Applications.*

36. Une surface de révolution étant donnée, imaginons que, pour la représenter sur un plan, on développe, en vraie grandeur, l'un de ses méridiens suivant une droite, puis ses parallèles suivant d'autres droites perpendiculaires à la première. On obtiendra ainsi une projection qui jouira de la propriété de conserver les superficies; car, à chaque rectangle infiniment petit formé par deux méridiens et deux parallèles de la surface, correspondra sur la carte un parallélogramme ayant la même base et la même hauteur.

Soient, en un point quelconque,  $l$  l'angle de la tangente au méridien avec l'axe de la surface,  $r$  le rayon du parallèle,  $\rho$  le rayon de courbure du méridien; soient encore  $m$  l'angle du méridien du point considéré avec celui dont la projection est rectiligne, et  $s$  la longueur de l'arc de ce dernier mesurée à partir d'un parallèle convenu. Supposons, pour fixer les idées, que cet arc, dans le voisinage du point que l'on considère, tourne sa concavité vers l'axe de la surface, et que  $r$  diminue quand  $s$

augmente. Enfin appelons  $\theta$  l'altération éprouvée sur la carte par l'angle du méridien avec le parallèle, en conservant la notation déjà adoptée pour les autres quantités résultant de la déformation. Aux coordonnées  $l$  et  $m$  correspond un double canevas formé de méridiens et de parallèles. Les variables  $r$ ,  $\rho$  et  $s$  sont des fonctions connues de  $l$ . Nous avons d'abord à déterminer  $\theta$ ,  $h$ ,  $k$ ,  $a$ ,  $b$ , ..., en fonction de  $l$  et de  $m$ .

Si l'on projette un arc infiniment petit de la section méridienne sur le rayon du parallèle qui passe par une de ses extrémités, et l'arc correspondant du méridien de la carte sur la droite qui représente ce parallèle, on formera deux triangles rectangles qui donneront respectivement

$$\frac{dr}{ds} = -\sin l, \quad \text{tang} \theta = -m \frac{dr}{ds};$$

d'où l'on conclut

$$\text{tang} \theta = m \sin l.$$

Les aires étant conservées, le rapport de surfaces,  $h k \cos \theta$ , doit se réduire à l'unité; et, comme déjà le rapport de longueurs  $k$  sur le parallèle est égal à un, il viendra

$$h = \sec \theta = \sqrt{1 + m^2 \sin^2 l}, \quad k = 1.$$

Nous connaissons ainsi deux diamètres conjugués de l'ellipse indicatrice; les demi-axes de cette ellipse, qui sont ici inverses l'un de l'autre, seront fournis par les deux équations

$$a^2 + b^2 = 2 + m^2 \sin^2 l, \quad ab = 1,$$

desquelles on tire

$$a = \sqrt{1 + \frac{m^2}{4} \sin^2 l} + \frac{m}{2} \sin l,$$

$$b = \sqrt{1 + \frac{m^2}{4} \sin^2 l} - \frac{m}{2} \sin l.$$

Il en résulte, pour la tangente de la moitié de la plus grande altération d'angle,

$$\text{tang } \omega = \frac{m}{2} \sin l = \frac{1}{2} \text{ tang } \theta.$$

Chacune des deux directions dont l'angle est le plus altéré fait, avec la première tangente principale, un angle  $U$  pour lequel on a

$$U = \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}, \quad \text{tang } U = a.$$

Les rapports de longueurs suivant ces deux directions étant égaux à l'unité, l'une d'elles se confond ici avec la tangente au parallèle. Cette remarque nous dispense d'avoir recours aux formules du n° 21 pour calculer les angles  $u$  et  $v$  de la première tangente principale avec la tangente au méridien et la tangente au parallèle; nous pouvons écrire immédiatement

$$u = \frac{\pi}{2} - U = \frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2}, \quad \text{tang } u = b, \quad v = U, \quad \text{tang } v = a.$$

Sur la carte, on aura, pour les angles correspondants,

$$U' = u, \quad \text{tang } u' = b', \quad v' = u.$$

La tangente au méridien de la carte donnant, avec le parallèle, les directions de deux diamètres conjugués de l'ellipse indicatrice, le grand axe de cette ellipse passera à l'intérieur de l'angle aigu formé par ces deux lignes et la première tangente principale, à l'intérieur de l'angle droit dont cet angle aigu est la projection.

Les côtés de chaque rectangle infiniment petit du canevas tracé sur la surface de révolution ont pour longueurs les valeurs absolues de  $ds$ , ou  $\rho dl$ , et de  $rdm$ ; d'ailleurs, sur la première tangente principale, les accroissements de  $l$  et de  $m$  sont ici de signes contraires; les deux couples de séries de lignes orthogonales seront donc

fournis (n° 30) par les équations différentielles

$$\rho dl + ar dm = 0, \quad a \rho dl - r dm = 0,$$

dans lesquelles  $a$  doit être remplacé par sa valeur ci-dessus en fonction de  $l$  et de  $m$ . On peut encore prendre pour variables indépendantes  $s$  et  $m$ , ou bien  $r$  et  $m$ ; alors les équations différentielles seront

$$ds + ar dm = 0, \quad a ds - r dm = 0,$$

et il faudra substituer à  $\sin l$ , dans  $a$ , l'expression de  $-\frac{dr}{ds}$  en fonction de  $s$ , ou bien en fonction de  $r$ .

A cause de  $u = \frac{\pi}{2} - U$ , les équations des lignes qui se projettent en vraie grandeur se réduisent à

$$dl = 0, \quad \cot 2U ds + r dm = 0.$$

La première représente les parallèles, solution qui résulte de la définition même du mode de représentation. Comme on a

$$\cot 2U = -\tan \omega = -\frac{m}{2} \sin l = \frac{m}{2} \frac{dr}{ds},$$

la seconde équation peut s'écrire

$$m dr + 2r dm = 0$$

et a pour intégrale

$$rm^2 = \text{const.}$$

Ainsi  $\Phi(s)$  et  $\Psi(rm^2)$  expriment les coordonnées des canevas dont les parallélogrammes ont des côtés de même longueur sur la surface et sur la carte.

37. Comme second exemple, nous prendrons encore la représentation d'une surface quelconque de révolution sur un plan. Cette fois, les méridiens seront tous figurés par des droites partant d'un même point et faisant entre elles des angles égaux à ceux des méridiens eux-mêmes,

les parallèles par des circonférences ayant ce point pour centre. Nous appellerons  $R$  le rayon de l'une quelconque de ces circonférences;  $R$  sera une fonction connue de l'arc de méridien  $s$ , sur laquelle nous ne ferons aucune hypothèse; nous désignerons par  $\zeta$  la dérivée de son logarithme népérien par rapport à  $s$ . Soient toujours  $r$  le rayon du parallèle de la surface et  $m$  l'angle d'un méridien quelconque avec un méridien convenu.

Les axes de l'ellipse indicatrice sont partout dirigés suivant la tangente au méridien et la tangente au parallèle; ils ont pour longueurs  $\frac{dR}{ds}$ , abstraction faite du signe, et  $\frac{R}{r}$ .

La tangente de l'angle du méridien avec l'une ou l'autre des deux lignes dont l'angle éprouve la plus grande altération est  $\sqrt{r\zeta}$ .

Les doubles canevas orthogonaux auront pour coordonnées  $\Phi(s)$  et  $\Psi(m)$ ; l'un d'entre eux, celui qui correspond à

$$\Phi(s) = \int \frac{ds}{r}, \quad \Psi(m) = m,$$

sera formé de carrés sur la surface de révolution.

Les doubles canevas de losanges auront pour coordonnées  $\Phi(s) + \Psi(m)$  et  $\Phi(s) - \Psi(m)$ . Celui d'entre eux pour lequel  $\Phi$  et  $\Psi$  satisfont aux relations précédentes décomposera la surface en carrés; il sera tracé par deux séries de loxodromies inclinées à 45 degrés sur les méridiens.

Si l'on pose

$$\sigma = \int \sqrt{\frac{\zeta}{r}} ds,$$

les doubles canevas auxquels donnent lieu les lignes dont l'angle éprouve le *maximum* d'altération seront

fournis par les coordonnées  $\Phi(\sigma + m)$  et  $\Psi(\sigma - m)$  ; celui qui répond aux coordonnées  $\sigma + m, \sigma - m$  est en même temps un double canevas de losange.

Parmi les systèmes de projections que nous venons de considérer, il y en a une infinité qui conservent les aires : ce sont ceux dans lesquels on prend

$$R = \sqrt{2 \int r ds},$$

d'où résulte

$$\sigma = \int \frac{ds}{R} = \int \frac{dR}{r}.$$

(Extrait des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2<sup>e</sup> série, t. XVII, 1878.)

CHAPITRE II.

**Recherche du système de projection le mieux approprié  
à la représentation d'une contrée particulière.**

*Conditions à remplir. — Notation.*

38. Dans la construction d'une carte à grande échelle destinée aux services publics, comme celle qui a été dressée en France par le Dépôt de la Guerre, la condition la plus importante à remplir est relative à la reproduction des angles. Il n'est pas nécessaire que le mode de projection les conserve rigoureusement, mais il ne doit les altérer que de quantités assez faibles pour que chaque feuille de la carte constitue un véritable levé topographique.

Les distances étant inévitablement modifiées, l'échelle du dessin variera plus ou moins d'une feuille à l'autre. Il faut rendre cette variation aussi petite que possible en réduisant à son *minimum* la plus grande altération de longueur.

Enfin, avant de tracer le canevas, on aura à calculer les coordonnées d'un nombre considérable de points rapportés à deux axes rectangulaires. Une troisième condition à laquelle il convient de satisfaire réside dans la simplicité des formules employées à cet usage.

Ces conditions sont aussi celles que l'on doit chercher à réaliser dans la construction d'une carte ordinaire. Le but une fois atteint, non seulement les altérations seront aussi faibles que possible, mais il sera facile d'en tenir compte toutes les fois que l'on aura à faire usage de la carte. Il suffirait pour cela que l'on eût tracé légèrement



sur cette carte, et avec une teinte différente de celles des autres lignes, quelques-unes des courbes le long desquelles l'altération de longueur est constante. Nous verrons que ces courbes sont du second degré et presque toujours des ellipses.

39. Sans faire d'abord d'autre hypothèse sur la forme de la surface terrestre, nous la considérerons comme étant de révolution autour de la ligne des pôles, et nous prendrons le rayon équatorial pour unité. Dans l'intérieur du pays à représenter, nous adopterons un point particulier, dit *point central*, dont nous apprendrons plus tard à déterminer exactement la position; le méridien et le parallèle de ce point seront appelés, respectivement, *méridien moyen* et *parallèle moyen*. Sur la carte, nous choisirons, pour origine des coordonnées, l'homologue du point central; l'axe des  $x$  sera tangent, et l'axe des  $y$  normal à la projection du méridien moyen. Enfin, nous ferons usage de la notation suivante, qui nous a déjà servi en partie :

- $l$  latitude d'un point quelconque de la contrée;
  - $m$  longitude du même point comptée à partir du méridien moyen;
  - $x$  abscisse
  - $y$  ordonnée
- } du point correspondant de la carte;
- $r$  rayon du parallèle terrestre à la latitude  $l$ ;
  - $\rho$  rayon de courbure du méridien à la même latitude;
  - $N$  grande normale à la latitude  $l$ , ou longueur comprise sur la normale, entre le point considéré et la ligne des pôles;
  - $l_0$  latitude du parallèle moyen;
  - $r_0$  rayon du parallèle moyen;
  - $\rho_0$  rayon de courbure du méridien à la latitude  $l_0$ ;

- $N_0$  grande normale à la même latitude ;  
 $\lambda$  excès de la latitude du point considéré sur celle du parallèle moyen ;  
 $s$  arc de méridien compris entre le parallèle moyen et celui de latitude  $l$  ;  
 $t$  portion du parallèle moyen comprise entre le méridien moyen et celui de longitude  $m$  ;  
 $h$  rapport de longueurs sur le méridien, au point considéré ;  
 $k$  rapport de longueurs sur le parallèle ;  
 $\theta$  altération de l'angle du méridien avec le parallèle ;  
 $a$  demi grand axe de l'ellipse indicatrice ;  
 $b$  demi petit axe de la même ellipse ;  
 $\omega$  moitié du *maximum* de l'altération d'angle .

Les coordonnées qui déterminent la position d'un point quelconque sur la surface du globe peuvent être  $l$  et  $m$ , ou  $\lambda$  et  $m$ , ou encore  $s$  et  $t$ . On a d'ailleurs

$$\lambda = l - l_0, \quad t = r_0 m.$$

On a aussi

$$r = N \cos l, \quad r_0 = N_0 \cos l_0, \quad ds = \rho dl,$$

et, dans le triangle infiniment petit que l'on forme en abaissant, de l'une des extrémités de l'arc  $ds$ , une perpendiculaire sur le rayon du parallèle de l'autre extrémité,

$$\frac{dr}{ds} = -\sin l.$$

#### *Carte d'un pays limité dans tous les sens.*

40. Nous supposons que la contrée dont on veut dresser la carte est d'une étendue moyenne, comparable à celle de la France, de l'Espagne, etc., de sorte que les valeurs de  $s$  et de  $t$  restent toujours assez petites. Pour l'Espagne, par exemple, qui se trouve comprise entre les parallèles de 36 et de 44 degrés, et entre deux méridiens

dont l'angle est d'environ  $12^{\circ}40'$ , la plus grande valeur de  $s$  est à peu près  $\frac{1}{14}$ , et celle de  $t$ ,  $\frac{1}{13}$ . Alors les coordonnées  $x$  et  $y$  d'un point quelconque de la carte peuvent être supposées développées en séries convergentes suivant les puissances de  $s$  et de  $t$ . D'après le choix qui a été fait pour l'origine, ces développements ne contiendront pas de terme indépendant des variables, et, à cause de la direction qui a été donnée à l'axe des  $x$ , le terme en  $s$  manquera dans  $y$ . Il nous reste à déterminer les coefficients des autres termes de manière que le système de projection satisfasse aux conditions qui ont été indiquées plus haut.

41. Des développements de  $x$  et de  $y$  on déduirait ceux de  $h$ , de  $k$  et de  $\sin\theta$ , par les formules

$$h = \left[ \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad k = \frac{r_0}{r} \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\sin\theta = \frac{r_0}{r h k} \left[ \left( \frac{dx}{ds} \right) \left( \frac{dx}{dt} \right) + \left( \frac{dy}{ds} \right) \left( \frac{dy}{dt} \right) \right].$$

Comme la dérivée de  $y$  par rapport à  $s$  ne renferme pas de terme constant, pour que le premier terme de  $h$  soit égal à l'unité, il faut que le coefficient de  $s$ , dans  $x$ , soit aussi égal à l'unité, et, pour que  $\theta$  n'ait pas non plus de terme constant, il faut que  $x$  ne contienne pas de terme en  $t$ . Alors  $k$  se réduit à  $\frac{r_0}{r} \left( \frac{dy}{dt} \right)$ , sauf des termes du premier ordre ou d'ordres plus élevés en  $s$  et  $t$ . Par conséquent, si, abstraction faite des termes d'un ordre supérieur au premier, on prend  $x$  égal à  $s$ , et  $y$  à  $\frac{r}{r_0} t$ , l'angle  $\theta$  et les différences des rapports  $h$  et  $k$  avec l'unité seront du premier ordre. Cherchons maintenant à les abaisser au second.

42. Le carré de la dérivée de  $\gamma$  par rapport à  $s$  n'introduit dans  $h$  aucun terme du premier ordre; il faut donc que celui de la dérivée de  $x$  par rapport à  $s$  n'en introduise pas non plus, ce qui exige que  $x$  ne renferme ni terme en  $s^2$ , ni terme en  $st$ .

Un raisonnement analogue appliqué à  $k$  prouve que  $\gamma$  ne doit contenir ni terme en  $st$ , ni terme en  $t^2$ . Alors les termes du premier ordre, dans  $\sin \theta$ , se réduisent à ceux de  $\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{r}{r_0} \frac{dr}{ds} t$ , ou à ceux de  $\frac{dx}{dt} - \frac{\sin l_0}{r_0} t$ . On les fera disparaître en donnant à  $t^2$ , dans le développement de  $x$ , le coefficient  $\frac{\sin l_0}{2r_0}$ . On est ainsi conduit à prendre, abstraction faite des termes du troisième ordre,  $x$  égal à  $s + \frac{\sin l_0}{2r_0} t^2$ , et  $\gamma$  à  $\frac{r}{r_0} t$ .

43. Introduisons maintenant les termes du troisième ordre, en les affectant de coefficients arbitraires, et posons

$$(1) \quad \begin{cases} x = s + \frac{\sin l_0}{2r_0} t^2 + \frac{A}{3} s^3 - B s^2 t + C s t^2 + \frac{D}{3} t^3, \\ y = \frac{r}{r_0} t + \frac{A'}{3} s^3 + B' s^2 t - C' s t^2 + \frac{D'}{3} t^3; \end{cases}$$

on aura, en négligeant les termes d'ordres supérieurs au deuxième,

$$\begin{aligned} h &= 1 + A s^2 - 2 B s t + \left( C + \frac{\sin^2 l_0}{2r_0^2} \right) t^2, \\ k &= 1 + \frac{r_0}{r} \left[ B' s^2 - 2 C' s t + \left( D' + \frac{r_0^2}{2r^2} \tan^2 l_0 \right) t^2 \right], \\ \sin \theta &= \frac{1}{rhk} \left[ \left( \sin l_0 - \frac{r_0}{r} \sin l \right) t + (A' r - B r_0) s^2 \right. \\ &\quad \left. + 2(B' r + C r_0) s t + (D r_0 - C' r) t^2 \right]. \end{aligned}$$

Sans modifier le degré de l'approximation, on peut remplacer  $l$  par  $l_0$ , et  $r$  par  $r_0$ , dans les coefficients des termes du deuxième ordre de  $h$ ,  $k$  et  $\sin \theta$ . Quant à  $r \sin l$ , qui fait partie du coefficient de  $t$  dans  $\sin \theta$ , on lui substituera son développement borné à deux termes, savoir

$$r \sin l = r_0 \sin l_0 + \left( \frac{r_0}{\rho_0} \cos l_0 - \sin^2 l_0 \right) s \quad (*).$$

Enfin, jusqu'ici nous avons toujours tenu compte de l'aplatissement, mais il est inutile d'y avoir égard dans les termes du second ordre; nous remplacerons donc, dans ces termes,  $\rho_0$  par l'unité et  $r_0$  par  $\cos l_0$ . Il vient alors

$$h = 1 + A s^2 - 2 B s t + \left( C + \frac{1}{2} \tan^2 l_0 \right) t^2,$$

$$k = 1 + B' s^2 - 2 C' s t + \left( D' + \frac{1}{2} \tan^2 l_0 \right) t^2,$$

$$\sin \theta = (A' - B) s^2 + 2 \left( B' + C - \frac{\cos 2 l_0}{2 \cos^2 l_0} \right) s t + (D - C') t^2.$$

Nous pouvons faire en sorte que  $\theta$  et  $h - k$  ne soient plus que du troisième ordre; il suffit, pour cela, de poser

$$A' = C' = D = B, \quad B' = A, \quad D' = C, \quad A + C = \frac{\cos 2 l_0}{2 \cos^2 l_0}.$$

Les formules

$$(a - b)^2 = (h - k)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + (h + k)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad \sin \omega = \frac{a - b}{a + b}$$

font voir que  $a - b$  et  $\omega$  seront aussi du troisième ordre.

(\*) Pour obtenir le coefficient de  $s$  dans ce développement, il suffit de prendre la dérivée de  $r \sin l$  par rapport à  $s$ , puis de faire  $s$  égal à zéro; or on a

$$\frac{d(r \sin l)}{ds} = r \frac{d(\sin l)}{dl} \frac{dl}{ds} + \sin l \frac{dr}{ds} = \frac{r}{s} \cos l - \sin^2 l.$$

Ainsi, A et C étant liés entre eux par la relation

$$(2) \quad 2(A + C) \cos^2 l_0 = \cos 2l_0,$$

tous les modes de projection que définissent les formules

$$(3) \quad \begin{cases} x = s + \frac{\sin l_0}{2r_0} t^2 + \frac{A}{3} s^2 - B s^2 t + C s t^2 + \frac{B}{3} t^3, \\ y = \frac{r}{r_0} t + \frac{B}{3} s^2 + A s^2 t - B s t^2 + \frac{C}{3} t^3 \end{cases}$$

possèdent, à l'exclusion des autres systèmes, la double propriété de ne produire que des altérations d'angles du troisième ordre, et des altérations de distances du second. Autour d'un même point, l'altération de l'unité de longueur est sensiblement la même dans toutes les directions; en l'appelant  $\epsilon$ , on a

$$(4) \quad \epsilon = A s^2 - 2 B s t + \left( \frac{1}{2} - A \right) t^2.$$

Il est d'ailleurs impossible de l'abaisser au troisième ordre, puisque, dans cette dernière expression, le coefficient de  $s^2$  et celui de  $t^2$  ne sauraient être nuls en même temps.

#### *Système du minimum de déformation.*

44. Les altérations d'angles sont maintenant devenues négligeables. On pourrait les atténuer davantage, et même les détruire tout à fait, en introduisant, dans les développements de  $x$  et de  $y$ , des termes d'ordres supérieurs au troisième; mais ces modifications, qui ne produiraient que des changements peu appréciables, lorsqu'il s'agirait de rapporter les longueurs sur la carte, compliqueraient les formules sans utilité réelle. Ce qu'il importe maintenant, c'est de disposer des coefficients A, B, C, dont deux

sont arbitraires, de la constante  $l_0$ , enfin de la position du méridien moyen, de manière que la plus grande des valeurs que  $\epsilon$  est susceptible de prendre, dans toute l'étendue de la carte, soit aussi faible que possible.

Quelles que soient les valeurs de  $A$  et de  $B$ , il existera toujours un angle  $E$  et une quantité  $F$  tels que l'on ait

$$\operatorname{tang} E = \frac{B}{A - \frac{1}{4}}, \quad F - \frac{1}{4} = \left( A - \frac{1}{4} \right) \sec E,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(5) \quad A - \frac{1}{4} = \left( F - \frac{1}{4} \right) \cos E, \quad B = \left( F - \frac{1}{4} \right) \sin E.$$

Maintenant, au lieu des variables  $s$  et  $t$ , prenons-en deux autres  $u$  et  $v$ , liées aux premières par les relations

$$u = s \cos \frac{1}{2} E - t \sin \frac{1}{2} E,$$

$$v = s \sin \frac{1}{2} E + t \cos \frac{1}{2} E,$$

lesquelles donnent

$$s = u \cos \frac{1}{2} E + v \sin \frac{1}{2} E,$$

$$t = v \cos \frac{1}{2} E - u \sin \frac{1}{2} E.$$

En substituant ces dernières expressions à  $s$  et à  $t$  dans celle de l'altération de l'unité de longueur, on trouve

$$\begin{aligned} \epsilon = & \left[ \frac{1}{4} + \left( A - \frac{1}{4} \right) \cos E + B \sin E \right] u^2 \\ & + 2 \left[ \left( A - \frac{1}{4} \right) \sin E - B \cos E \right] uv \\ & + \left[ \frac{1}{4} - \left( A - \frac{1}{4} \right) \cos E - B \sin E \right] v^2, \end{aligned}$$

puis, en remplaçant  $A = \frac{1}{4}$  et  $B$  par leurs valeurs en fonction de  $E$  et de  $F$ ,

$$(6) \quad \epsilon = Fu^2 + \left(\frac{1}{2} - F\right)v^2.$$

Remarquons que, si  $s$  et  $t$  d'une part,  $u$  et  $v$  de l'autre, constituaient deux systèmes de coordonnées rectangulaires rapportées à la même origine, si de plus l'axe des  $u$  faisait avec celui des  $t$  un angle égal à  $\frac{E}{2}$ , les formules ci-dessus qui expriment  $\epsilon$ , la première en fonction de  $s$  et de  $t$ , la seconde en fonction de  $u$  et de  $v$ , deviendraient, pour chaque valeur attribuée à  $\epsilon$ , les deux équations d'une même courbe du second degré, ellipse ou hyperbole, dont les axes seraient situés sur les axes du second système de coordonnées. Enfin,  $\Delta$  représentant la longueur du diamètre qui est incliné à 45 degrés sur les axes de la courbe, on aurait

$$(7) \quad \epsilon = \left(\frac{\Delta}{4}\right)^2.$$

Les ellipses correspondraient aux valeurs positives de  $F$  qui sont plus petites que  $\frac{1}{2}$ .

45. Cela posé, considérons l'un quelconque des systèmes de projection qui se trouvent définis par les formules (2) et (3). Des valeurs de  $A$  et de  $B$  qui lui correspondent, on peut déduire celles de  $E$  et de  $F$ ; supposons, pour fixer les idées, que cette dernière soit positive et non supérieure à  $\frac{1}{2}$ . Construisons, à une échelle assez faible, une carte auxiliaire de la contrée en plaçant chaque point d'après deux coordonnées rectangulaires respectivement égales à  $s$  et à  $t$ . Par l'origine, menons



une droite faisant, avec l'axe des  $t$ , un angle égal à  $\frac{1}{2} E$ , et une seconde droite perpendiculaire à la première. Traçons une ellipse dont les axes se trouvent sur les deux droites et aient leurs carrés inversement proportionnels aux nombres  $F$  et  $\frac{1}{2} - F$ . Enfin traçons d'autres ellipses homothétiques à la première, et dont la plus grande, que nous appellerons *l'ellipse limite*, enveloppe le contour de la carte auxiliaire, tout en ayant avec lui un ou plusieurs points communs. Chaque ellipse marquera sur cette carte le lieu des points pour chacun desquels l'altération de l'unité de longueur est égale au carré du quart du diamètre incliné à 45 degrés sur les axes. Nulle pour le centre commun des ellipses, l'altération ira en augmentant peu à peu à mesure que l'on s'écartera de ce point, et atteindra sa plus grande valeur sur l'ellipse limite.

Il est permis de négliger l'aplatissement dans le calcul de l'altération  $\epsilon$ , par conséquent aussi dans la construction de la carte auxiliaire, ce qui revient à prendre, pour coordonnées des divers points de cette carte, non plus  $s$  et  $t$ , mais  $\lambda$  et  $m \cos l_0$ ; dans la dernière, on peut même remplacer  $l_0$  par une valeur approchée exprimant un nombre exact de degrés ou de demi-degrés et se rapportant à la latitude d'un point de la région centrale du pays. La carte auxiliaire ainsi obtenue sera la même pour tous les modes de projection. Ce qui varierait de l'un à l'autre, ce serait la forme des ellipses dont nous avons fait usage tout à l'heure, la direction de leurs axes et la position de leur centre commun. Il s'agit de déterminer ces éléments de manière que, dans l'ellipse limite, le diamètre également incliné sur les axes soit le plus petit possible.

46. Ayant tracé la carte auxiliaire, ou seulement les quelques portions de son contour que l'on présume devoir être utiles, on construit, d'autre part, des ellipses de formes diverses, en attribuant, par exemple, au rapport des deux axes, les valeurs zéro, un dixième, deux dixièmes, trois dixièmes, etc., jusqu'à un, de manière à passer ainsi graduellement du système de deux droites parallèles à la circonférence. On calque chaque courbe sur une feuille spéciale de papier transparent, et l'on dessine, sur cette feuille, un certain nombre d'autres courbes homothétiques à la première. On applique l'une des feuilles ainsi obtenues sur la carte auxiliaire, puis on la fait glisser et tourner de manière à déplacer, sur cette carte, le centre commun des ellipses de la feuille et à changer la direction de leurs axes, jusqu'à ce que l'on ait trouvé la position dans laquelle l'ellipse limite est la plus petite possible. On mesure alors le diamètre de cette ellipse qui divise en deux parties égales l'angle des axes. On renouvelle les mêmes essais successivement avec les autres feuilles. Celle qui fournit la plus petite longueur pour le diamètre mesuré correspond au système de projection que l'on cherche, et il est facile de remonter aux formules par lesquelles ce système se trouvera défini.

D'abord, du résultat obtenu par la mesure du diamètre, on déduit la plus grande altération de l'unité de longueur à l'aide de la formule (7). Le rapport du grand axe au petit, dans les ellipses de la feuille, fait connaître  $F$ , car, en appelant  $G$  ce rapport, on a, d'après l'équation (6),

$$(8) \quad F = \frac{1}{2(G^2 + 1)}.$$

La feuille ayant été mise en place sur la carte auxiliaire, le point de cette carte qui se trouve couvert par le centre commun des ellipses donne le point central;

sa latitude est  $l_0$ ; son méridien et son parallèle sont le méridien et le parallèle moyens. En doublant l'angle que fait alors le grand axe des ellipses avec les parallèles de la carte, on obtient l'angle E. Les valeurs de E et de F étant connues, on calcule celles de A et de B par les formules (5), puis celle de C par l'équation (2); il n'y a plus alors qu'à introduire ces valeurs et celle de  $l_0$  dans les formules (3).

47. La comparaison, telle que nous venons de l'effectuer, ne porte que sur les systèmes de projection dans lesquels F est compris entre zéro et  $\frac{1}{2}$ . Pour une valeur de F négative ou plus grande que  $\frac{1}{2}$ , les points où la représentation produit la même altération de longueur se répartissent, sur la carte auxiliaire, suivant des hyperboles homothétiques; celles-ci se trouvent nécessairement conjuguées deux à deux, sauf l'une d'elles qui se réduit à un système de deux droites servant aux autres d'asymptotes. En tout point correspondant à l'une de ces droites, la projection conserve les distances; pour deux points appartenant respectivement à deux hyperboles conjuguées, l'altération de l'unité de longueur prend des valeurs égales et de signes contraires, mesurées par le carré du quart du diamètre incliné à 45 degrés sur les axes, diamètre qui est réel dans l'une des deux courbes. On voit d'après cela comment, à l'aide de la carte auxiliaire et de groupes d'hyperboles tracées sur papier transparent, on pourra déterminer le plus avantageux des modes de projection pour lesquels F est négatif ou plus grand que  $\frac{1}{2}$ . Il ne restera plus qu'à choisir entre ce dernier et celui qu'auront fourni les autres valeurs de F,

ce qui se fera sans hésitation, par la comparaison des diamètres à 45 degrés dans l'ellipse et dans l'hyperbole limites.

48. La plupart du temps, on reconnaîtra d'avance l'inutilité de la seconde série d'essais, d'autant plus que, dans la comparaison dont nous venons de parler, ce n'est pas le diamètre même de l'hyperbole qui doit figurer, mais son produit par  $\sqrt{2}$ . En effet, pour les systèmes de projection appartenant à la première série, l'altération de l'unité de longueur est partout positive, tandis que pour chacun des systèmes de la seconde elle est tantôt positive et tantôt négative, ce qui double ses variations. Il y aurait lieu de faire une remarque analogue sur les modes de projection qui, autour d'un même point, augmentent ou diminuent les distances, suivant la direction; tel est celui de la carte du Dépôt de la Guerre. Pour éviter ces distinctions et rendre les systèmes de la première série immédiatement comparables aux autres, nous supposerons qu'avant d'appliquer les formules (3) on retranche, de chacun des coefficients, une fraction de sa valeur marquée par la moitié de la plus grande altération de l'unité de longueur, ce qui revient à un changement d'échelle et ne saurait modifier les angles sur la carte. Alors les distances seront conservées en tous les points de l'ellipse dont le rapport d'homothétie avec l'ellipse limite est  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Négative à l'intérieur de la première courbe et positive à l'extérieur, l'altération de longueur augmentera, en valeur absolue, pour des points de plus en plus éloignés de son contour; au centre et sur l'ellipse limite, cette valeur absolue atteindra son *maximum*, qui ne sera plus que la moitié de ce qu'il était auparavant.

49. Les expressions du troisième ordre que nous avons ajoutées à  $s + \frac{\sin I_0}{2r_0} t^2$  et à  $\frac{r}{r_0} t$ , pour compléter  $x$  et  $y$ , dans les formules (1), ne comportent pas toute la généralité possible, car la grandeur relative d'un terme ne dépend pas seulement de son degré, mais aussi de son coefficient. Aux termes du troisième degré, nous devons en joindre d'autres du second et d'autres du premier, en les supposant affectés de coefficients comparables, pour ceux-là, aux valeurs que peuvent prendre  $s$  et  $t$  dans l'intérieur ou sur le contour de la contrée, et, pour ceux-ci, aux carrés des mêmes valeurs. Ces coefficients se grouperont entre eux, et non avec ceux des termes du troisième degré, dans les développements de  $h$ , de  $k$  et de  $\sin \theta$ , et l'on établira facilement les relations auxquelles ils doivent satisfaire pour que les altérations d'angles restent comparables aux grandeurs du troisième ordre, et les altérations de distances à celles du second. On trouve que les valeurs (3) de  $x$  et de  $y$  doivent être complétées par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\xi &= A_1 s^2 + 2 B_1 s t - A_1 t^2 + A_2 s, \\ \eta &= - B_1 s^2 + 2 A_1 s t + B_1 t^2 + A_2 t,\end{aligned}$$

dans lesquelles  $A_1$ ,  $B_1$  et  $A_2$  désignent des coefficients arbitraires, mais de grandeurs comparables, les deux premiers aux valeurs que  $s$  et  $t$  sont susceptibles de prendre, le troisième aux carrés de ces mêmes valeurs. Quant à l'altération de l'unité de longueur, elle devient

$$\varepsilon = A s^2 - 2 B s t + \left( \frac{1}{2} - A \right) t^2 + 2 A_1 s + 2 B_1 t + A_2.$$

En général, on pourra faire disparaître les termes du premier degré qui figurent dans  $\varepsilon$ , en remplaçant les variables  $s$  et  $t$  par d'autres ayant avec elles des différences

constantes. On pourrait ensuite faire abstraction du terme constant, ce qui reviendrait à changer d'échelle dans la construction de la carte. On retomberait alors sur l'expression (4). Les seuls modes de projection que nous ayons à examiner sont ceux qui ne se prêteraient pas à ces transformations, c'est-à-dire ceux pour lesquels on aurait

$$B^2 = A \left( \frac{1}{2} - A \right).$$

Le changement de coordonnées dont on fait usage dans la réduction de l'équation de la parabole à sa forme la plus simple pourra être employé ici. Alors,  $u$  et  $v$  étant les nouvelles variables, et  $C_1$  désignant un coefficient constant, on trouvera

$$s = \frac{1}{2} v^2 - C_1 u.$$

Les points où la représentation produit la même altération de longueur se répartissent cette fois, sur la carte auxiliaire, suivant des paraboles égales ayant leurs axes sur une même droite. Les valeurs  $u$  et  $v$  étant considérées comme deux coordonnées rectangulaires, l'altération est nulle sur la parabole qui a son sommet à l'origine. Sur deux paraboles ayant leurs sommets équidistants de ce point, l'altération prend des valeurs égales et de signes contraires mesurées par la moitié du carré de la demi-cordé que l'une d'elles intercepte sur la tangente au sommet de la parabole qui passe par l'origine. On voit comment, à l'aide de la carte auxiliaire de la contrée, et de groupes de paraboles tracées sur papier transparent, on pourra déterminer le plus avantageux des modes de projection pour lesquels  $B^2$  est égal à  $A \left( \frac{1}{2} - A \right)$ . Il sera facile ensuite de le comparer à celui qui aura été obtenu

par les tracés d'ellipse. En général, ce dernier sera le plus avantageux, et c'est ce que l'on reconnaîtra souvent sans avoir recours aux essais qui viennent d'être indiqués.

*Cas particuliers.*

50. Si le contour du pays présente une certaine symétrie par rapport à un méridien ou par rapport à un parallèle, l'angle E sera assez voisin de zéro ou de 90 degrés. On lui donnera alors une de ces deux valeurs, afin de simplifier les formules, lesquelles deviendront

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = s + \frac{\sin l_0}{2 r_0} t^2 + \frac{A}{3} s^2 + C s t^2, \\ y = \frac{r}{r_0} t + A s^2 t + \frac{C}{3} t^3, \\ \epsilon = A s^2 + \left( \frac{1}{2} - A \right) t^2. \end{array} \right.$$

Dans les essais qui auront pour but de déterminer la valeur de A, on aura soin de maintenir le grand axe des ellipses perpendiculaire ou parallèle aux méridiens de la carte auxiliaire.

51. En prenant de plus A égal à zéro, on aurait

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = s + \frac{\sin l_0}{2 r_0} t^2 + \frac{\cos 2 l_0}{2 \cos^2 l_0} s t^2, \\ y = \frac{r}{r_0} t + \frac{\cos 2 l_0}{6 \cos^2 l_0} t^3, \\ \epsilon = \frac{1}{2} t^2. \end{array} \right.$$

Telles sont les formules qu'il conviendrait d'adopter si, dans le système qui correspond au *minimum* de la plus grande valeur de  $\epsilon$ , le coefficient A était assez petit.

Dans le cas où le parallèle de latitude moyenne serait voisin de celui de 45 degrés, elles se réduiraient à

$$x = s + \frac{1}{2} r_0 \sin l_0 m^2, \quad y = rm, \quad \varepsilon = \frac{1}{4} m^2.$$

52. L'angle E étant toujours supposé nul ou droit, si les essais conduisent à une valeur de A peu différente de  $\frac{1}{2}$ , on prendra A exactement égal à  $\frac{1}{2}$ , et, par conséquent, C à  $-\frac{1}{2} \operatorname{tang}^2 l_0$ . Il viendra

$$(11) \quad \begin{cases} x = s + \frac{\sin l_0}{2 r_0} t^2 + \frac{1}{6} s^3 - \frac{1}{2} \operatorname{tang}^2 l_0 s t^2, \\ y = \frac{r}{r_0} t + \frac{1}{2} s^2 t - \frac{1}{6} \operatorname{tang}^2 l_0 t^3, \\ \varepsilon = \frac{1}{2} s^2. \end{cases}$$

53. On adoptera aussi soit le système (10), soit le système (11), quand les points de contact des ellipses limites avec le contour du pays se trouveront dans le voisinage du diamètre incliné à 45 degrés sur les axes, car alors en chacun de ces points la valeur de  $s$  sera sensiblement la même que celle de  $t$ , et celle de  $\varepsilon$ , que l'on peut écrire

$$\varepsilon = \frac{1}{2} t^2 + A(s^2 - t^2),$$

deviendra à peu près indépendante de A.

54. On peut d'ailleurs présenter le système (11) sous une forme beaucoup plus simple, et lui donner une définition géométrique. Le développement de  $r$  borné à trois termes est

$$r = r_0 - \sin l_0 s - \frac{\cos l_0}{\rho_0} s^2;$$



si on le substitue à  $r$  dans  $y$ , si l'on néglige l'aplatissement dans les termes du troisième ordre et que l'on continue à supprimer ceux du quatrième, enfin si l'on pose

$$(12) \quad R_0 = r_0 \operatorname{cosec} l_0, \quad R = R_0 - s - \frac{1}{6} s^3, \quad \mu = m \sin l_0,$$

les formules (10) deviendront identiques aux suivantes :

$$(13) \quad x = R_0 - R \cos \mu, \quad y = R \sin \mu.$$

Celles-ci donnent pour l'équation d'un méridien quelconque

$$y = (R_0 - x) \operatorname{tang} \mu,$$

et, pour celle d'un parallèle,

$$y^2 + (R_0 - x)^2 = R^2.$$

Ainsi les méridiens de la carte sont des droites concourantes, et les parallèles, des circonférences concentriques. Les méridiens et le parallèle moyen sont tels qu'on les obtiendrait dans le développement du cône circonscrit, le long de ce parallèle, à la surface terrestre. La distance comprise entre le parallèle moyen et tout autre de la carte est égale à l'arc de méridien que ces deux parallèles interceptent sur le globe augmenté de la sixième partie de son cube. Comme rien ne distingue les méridiens les uns des autres dans ce mode de projection, il conserve ses propriétés quelle que soit, dans le sens des longitudes, l'étendue du pays que l'on veut représenter. On adoptera un parallèle moyen dont la latitude diffère peu de la moyenne arithmétique entre les deux latitudes extrêmes.

55. Pour calculer l'arc  $s$ , qui figure dans les formules

relatives à nos divers modes de projection, on se servira de son développement suivant les puissances de  $\lambda$ ; en négligeant l'aplatissement dans les termes d'ordre supérieur au deuxième, on a

$$s = \rho_0 \lambda^2 + \frac{3\rho_0(N_0 - \rho_0)}{2N_0} \text{tang } l_0 \lambda^3.$$

56. Considérons maintenant les méridiens terrestres comme des ellipses et soit  $e$  l'excentricité. Il viendra

$$N = \frac{1}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{1}{2}}}, \quad \rho = \frac{1 - e^2}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{3}{2}}};$$

d'où l'on conclut, en négligeant  $e^4$  dans les termes du deuxième ordre,

$$s = \rho_0 \lambda + \frac{3}{4} e^2 \sin 2l_0 \lambda^3.$$

En particulier, si nous nous reportons au système de projection défini par les formules (12) et (13), nous trouverons, en introduisant cette expression de  $s$  dans celle du rayon des parallèles de la carte,

$$(14) \quad R = R_0 - \rho_0 \left( \lambda + \frac{3}{4} e^2 \sin 2l_0 \lambda^3 + \frac{1}{6} \lambda^5 \right).$$

Au second membre de cette égalité, le facteur  $\rho_0$  doit être maintenu devant  $\lambda$ , mais, devant les autres termes, il ne sert qu'à mettre en évidence l'homogénéité.

### *Cartes de France et d'Espagne.*

57. Sur la carte de France construite par le Dépôt de la Guerre, la plus grande altération d'angle est de 18 minutes; la plus grande altération de l'unité de longueur

est  $\frac{1}{380}$ . Elles eussent été respectivement  $10'30''$  et  $\frac{1}{650}$ , si, au lieu du parallèle de  $45$  degrés de latitude, comme parallèle moyen, on avait pris celui de  $46^{\circ}30'$ . Enfin, elles se trouveraient réduites à  $25$  secondes et  $\frac{1}{1100}$ , si l'on faisait usage des formules (3) avec

$$A = 0,306, \quad C = -0,368, \quad l_0 = 41^{\circ}30',$$

le méridien moyen étant celui de Paris. Nous nous bornerons à ces quelques indications au sujet d'une carte qui n'est plus à faire. Nous nous étendrons, au contraire, sur l'application des recherches qui précèdent à la construction de la carte d'Espagne.

58. La carte auxiliaire de ce pays a été construite à l'échelle de  $1$  millimètre pour  $2$  minutes d'arc, sur une feuille divisée en petits carrés de  $1$  millimètre de côté, les coordonnées rectangulaires de chaque point étant l'excès de sa latitude sur  $40$  degrés, et le produit de sa longitude par  $\cos 40^{\circ}$ . Sur une autre feuille, quadrillée comme la première, on a tracé les onze ellipses du n<sup>o</sup> 46; chacune a été reportée sur papier transparent; puis on l'a réduite ou amplifiée, à l'aide d'un compas de proportion, de manière à en obtenir trois ou quatre autres qui lui soient homothétiques. On a déterminé l'ellipse limite de chacune des onze feuilles ainsi obtenues, puis mesuré en millimètres le diamètre  $\Delta$ , qui est incliné à  $45$  degrés sur les axes. Chacun des nombres trouvés a été multiplié par l'arc de  $2$  minutes, c'est-à-dire par  $\frac{\pi}{5400}$ , la lettre  $\pi$  représentant le rapport de la circonférence au diamètre; on a pris le quart du produit, puis on a élevé au carré, ce qui a donné la valeur

correspondante de l'altération de l'unité de longueur.  
On a pu ainsi former le tableau suivant :

Numéros des ellipses.	Rapports des axes.	$\Delta$ en millimètres.	Valeurs correspondantes de $\epsilon$ .
1.....	0	322	0,0022
2.....	0,1	321	0,0022
3.....	0,2	316	0,0021
4.....	0,3	310	0,0020
5.....	0,4	303	0,0020
6.....	0,5	299	0,0019
7.....	0,6	293	0,0018
8.....	0,7	292	0,0018
9.....	0,8	298	0,0019
10.....	0,9	304	0,0019
11.....	1	309	0,0020

L'ellipse n° 8 est celle qui correspond au *minimum*. Lorsqu'on la place sur la carte auxiliaire de manière à envelopper l'Espagne, elle en touche le contour aux points suivants : cap Ortégal, cap Saint-Adrien, île de Tarifa, cap de Creus. Son centre est alors de 21 minutes à l'ouest du méridien de Madrid, et de 22 minutes au nord du parallèle de 40 degrés; enfin, son grand axe fait, avec la direction des parallèles de la carte, un angle de  $12^{\circ}30'$ , qu'il faut porter de l'est vers le nord. Avec ces données, il serait facile de calculer A, B, C par les formules (8), (5) et (2). Le mode de représentation se trouverait défini par les expressions (3) de  $x$  et de  $y$ , après qu'on y aurait remplacé les trois coefficients par les valeurs obtenues. La plus grande altération de l'unité de longueur serait 0,0018, ou seulement 0,0009 si l'on choisit l'échelle de manière à avoir, au centre et sur l'ellipse limite, des altérations égales et de signes contraires (n° 48).

La demi-longueur du diamètre incliné à 45 degrés sur les axes de l'ellipse limite est de 146 millimètres. Ayant construit un carré de 146 millimètres de côté, on constate facilement qu'il est possible de le placer sur la carte auxiliaire de manière que le contour de l'Espagne l'enveloppe entièrement. Quand il a cette position, il est impossible qu'une branche d'hyperbole passant par deux de ses sommets soit extérieure au contour ; par conséquent, pour la portion de la contrée couverte par le carré, et à plus forte raison pour la contrée elle-même, la plus grande altération de l'unité de longueur produite par un système de projection correspondant à une valeur de  $F$  négative ou supérieure à  $\frac{1}{2}$  surpasserait 0,0009. Il est donc inutile de faire une seconde série d'essais portant sur des hyperboles.

Il n'y a pas lieu non plus d'essayer les paraboles. On le reconnaît en constatant que, si une droite de 146 millimètres de longueur a ses deux extrémités en dehors du contour de la carte auxiliaire, toute parabole passant par ces deux extrémités, et ayant son axe perpendiculaire à la droite, ou bien coupera le contour, ou bien interceptera sur l'axe, entre son sommet et la droite, une longueur moindre que la portion de l'axe comprise entre la même droite et le contour du pays.

59. Le point central que nous avons déterminé se trouve près du méridien de Madrid et dans le voisinage du parallèle de 40 degrés : il convient de le transporter à l'intersection de ces deux lignes. De plus, le grand axe des ellipses ayant une direction peu différente de celle des parallèles de la carte auxiliaire, nous pouvons abandonner les formules (3) et avoir recours aux expressions plus simples (9) de  $x$  et de  $y$  qui correspondent à  $E = 0$ .

En renouvelant, pour les onze formes d'ellipses, les essais déjà effectués, mais en s'astreignant cette fois à placer l'un des axes sur le parallèle de 40 degrés de la carte provisoire, et l'autre sur le méridien de Madrid, on est conduit à former le tableau suivant :

Numéros des ellipses.	Rapports des axes.	$\Delta$ en millimètres.	Valeurs correspondantes de $\epsilon$ .
1.....	0	335	0,0024
2.....	0,1	333	0,0024
3.....	0,2	330	0,0023
4.....	0,3	324	0,0022
5.....	0,4	315	0,0021
6.....	0,5	310	0,0020
7.....	0,6	308	0,0020
8.....	0,7	306	0,0020
9.....	0,8	321	0,0022
10.....	0,9	340	0,0024
11.....	1	351	0,0026

L'ellipse n° 8 est, comme tout à l'heure, celle qui réduit à son minimum la plus grande valeur de  $\epsilon$ . Elle touche le contour de la carte auxiliaire au cap de Creus. La valeur correspondante de  $A$  est 0,165. La plus grande altération de l'unité de longueur est 0,0010, soit en plus, soit en moins.

60. Les onze ellipses limites passent dans le voisinage du cap Ortégal, et ce point se trouve à peu près sur le diamètre qui fait des angles de 45 degrés avec les axes; c'est pourquoi il y a peu de différence entre les diverses longueurs de ce diamètre, et, par conséquent, entre les valeurs correspondantes de  $\epsilon$ . C'est donc ici le cas de renoncer même aux formules (9) et d'adopter le système remarquable de projection que nous avons étudié en der-

nier lieu (n° 54); il correspond à l'ellipse n° 1, laquelle se réduit à deux droites parallèles. La plus grande altération de l'unité de longueur ne se trouvera pas beaucoup augmentée par ce nouveau changement : de 0,0010, elle deviendra 0,0012.

Pour introduire les nombres dans la formule (14), nous avons supposé que l'on adoptait l'échelle de  $\frac{1}{100000}$ . Le rayon équatorial, qui jusqu'ici nous servait d'unité, a été pris égal à 6377398 mètres, et le carré  $e^2$  de l'excentricité de l'ellipse méridienne à 0,0066744; ce sont les valeurs calculées par Bessel. Celles qui ont été obtenues depuis par l'*Ordnance Survey*, savoir 6378284 mètres et 0,0067853, s'adaptent mieux à la forme générale de la surface du globe, puisqu'on a fait concourir à leur détermination un plus grand nombre de mesures effectuées dans des régions très-diverses; mais elles se rapprochent peut-être moins des éléments qu'il conviendrait d'adopter pour l'Espagne en particulier. La connaissance de ces éléments résultera précisément des opérations géodésiques que nécessite la construction de la carte. En tout cas, les changements que nos résultats devront subir se réduiront à des corrections dont le calcul se fera rapidement.

Appelons  $\Lambda$  l'excès, évalué en demi-degrés, de la latitude d'un parallèle sur 40 degrés, c'est-à-dire posons

$$\lambda = \frac{\pi}{360} \Lambda;$$

la formule (14) nous donnera, pour le rayon du parallèle de la carte exprimé en décimillimètres,

$$R = 1522157,7 - 11108,2622\Lambda - 0,4788\Lambda^2 - 0,1413\Lambda^3.$$

61. Les méridiens et les parallèles de la carte se cou-

pant à angle droit, les axes de l'ellipse indicatrice se trouveront, en chaque point, sur ces deux lignes;  $a$  sera la plus grande, et  $b$  la plus petite des deux quantités

$$h = -\frac{360}{\pi} \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\Lambda}, \quad k = \frac{R \sin 40^\circ}{r}.$$

La plus grande altération d'angle, au point considéré, sera donnée en secondes par

$$2\omega = \frac{a-b}{\sin 1''}.$$

Le long du parallèle de 40 degrés, les angles sont rigoureusement conservés ainsi que les distances. Pour le parallèle de 36 degrés, qui est le plus au sud, on a

$$\Lambda = -8, \quad R = 1611017,51, \quad \frac{dR}{d\Lambda} = -11121,731,$$

d'où résulte

$$h = 1,002434, \quad K = 1,002387, \quad 2\omega = 10''.$$

Soit  $\zeta$  un nombre déterminé par la condition

$$\zeta = 1,002434(1 - \zeta) - 1,$$

laquelle donne

$$\zeta = 0,001216.$$

Si l'on multiplie tous les termes de  $R$  par  $1 - \zeta$ , il viendra

$$R = 1520307 - 11088,765\Lambda - 0,478\Lambda^2 - 0,141\Lambda^3.$$

En adoptant cette nouvelle valeur de  $R$ , on ne modi-



fiera pas les altérations d'angles, et l'on réduira de moitié la plus grande altération de l'unité de longueur, qui alors se produira tantôt en plus et tantôt en moins. On trouve, en effet, pour le parallèle de 36 degrés,

$$h = 1 + 0,001214, \quad k = 1 + 0,001168, \quad 2\omega = 10'',$$

pour celui de 40 degrés,

$$h = 1 - 0,001216, \quad k = 1 - 0,001216, \quad 2\omega = 0,$$

et pour celui de 43° 50', qui est le plus au nord,

$$h = 1 + 0,001016, \quad k = 1 + 0,001060, \quad 2\omega = 9''.$$

Enfin, on peut, jusqu'à un certain point, tenir compte des termes de  $R$  où  $\Lambda$  entrerait à une puissance supérieure à la troisième, et qui ont été négligés, en modifiant un peu les coefficients des autres termes. Les altérations ne se trouvent diminuées ainsi que de quantités insignifiantes, mais la formule devient un peu plus simple. Nous prendrons définitivement

$$(15) \quad R = 1520344 - 11089,03\Lambda - 0,51\Lambda^2 - 0,141\Lambda^3.$$

Avec cette expression de  $R$ , la plus grande altération de l'unité de longueur est 0,00119, et la plus grande altération d'angle n'atteint pas 4 secondes. Ces mêmes altérations seraient respectivement 0,0018 et 12 minutes avec la projection de Bonne, qui a été employée en France par le Dépôt de la Guerre. Elles s'élèveraient à 0,0560 et à 3 degrés si l'on avait recours au développement conique, qui cependant ne diffère du système proposé que par la loi suivant laquelle les rayons des parallèles de la carte dépendent de la latitude. Enfin, sur notre

carte, nous pouvons placer les îles Baléares et le Portugal sans que les plus grandes altérations augmentent; il n'en serait pas de même si l'on faisait usage de la projection de Bonne.

62. En résumé, dans le système de projection qui nous paraît le mieux approprié à la construction de la carte d'Espagne, les méridiens sont représentés par des droites partant d'un même point, les parallèles par des circonférences ayant ce point pour centre. L'angle de deux méridiens de la carte est égal au produit de l'angle des méridiens correspondants du globe par le sinus de 40 degrés. Les rayons des parallèles de la carte, supposée construite à l'échelle de  $\frac{1}{1,000,000}$ , sont donnés, en décimillimètres, par la formule (15), dans laquelle  $\Lambda$  exprime en demi-degrés l'excès de la latitude du parallèle sur 40 degrés. On aura recours aux formules (13), pour calculer les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque de la carte. Les altérations d'angles ou de distances sont indépendantes de la longitude.

63. Pour terminer cette application, nous donnerons deux tableaux dont les nombres se rapportent à des latitudes croissant de demi-degré en demi-degré, à partir de 36 degrés, qui est la latitude la plus méridionale de l'Espagne, jusqu'à 44 degrés. Comme le parallèle de 44 degrés est en dehors de la contrée, nous avons introduit aussi dans nos tableaux la latitude de 43°50', qui est celle du point le plus septentrional.

Le premier tableau fait connaître les rayons de courbure et les grandes normales de l'ellipse méridienne, le rayon équatorial étant pris pour unité, puis les longueurs des mêmes lignes et celles des rayons des parallèles ter-

restres, exprimées en mètres, le rayon équatorial étant supposé égal à 6377398 mètres.

$l$	$\rho$	N	$\rho$	N	$r$
36, 0	0,99677137	1,00115497	6356808 <sup>m</sup>	6384764 <sup>m</sup>	5165382 <sup>m</sup>
36,30	0,99685462	1,00118284	6357339	6384941	5132579
37, 0	0,99693833	1,00121087	6357872	6385120	5099384
37,30	0,99702247	1,00123903	6358409	6385300	5065799
38, 0	0,99710701	1,00126733	6358948	6385480	5031827
38,30	0,99719194	1,00129576	6359490	6385662	4997471
39, 0	0,99727723	1,00132430	6360034	6385844	4962733
39,30	0,99736281	1,00135296	6360580	6386026	4927615
40, 0	0,99744875	1,00138171	6361128	6386210	4892120
40,30	0,99753494	1,00141055	6361677	6386394	4856252
41, 0	0,99762139	1,00143948	6362229	6386578	4820012
41,30	0,99770806	1,00146848	6362781	6386763	4783403
42, 0	0,99779492	1,00149754	6363335	6386948	4746428
42,30	0,99788196	1,00152666	6363890	6387134	4709089
43, 0	0,99796915	1,00155583	6364446	6387320	4671390
43,30	0,99805645	1,00158503	6365003	6387506	4633333
44, 0	0,99814385	1,00161427	6365561	6387693	4594922

Dans le second tableau, on trouvera les rayons des parallèles de la carte exprimés en décimillimètres; leurs dérivées par rapport à  $\Lambda$  changées de signe; les rapports des arcs infiniment petits de méridiens, sur la carte, aux arcs correspondants du globe; les rapports analogues pour les arcs de parallèles. Ces rapports sont ici les axes de l'ellipse indicatrice; jusqu'à 40 degrés, le grand axe se trouve sur le parallèle, et le petit sur le méridien; le contraire a lieu à partir de 40 degrés. L'avant-dernière colonne renferme les plus grandes altérations d'angles évaluées en secondes; elles sont très-faibles, parce que les deux axes de l'ellipse indicatrice diffèrent peu l'un de l'autre; la plus grande différence n'atteint pas

0,00002. Pour la même raison, on peut considérer l'altération de l'unité de longueur, en chaque point, comme ne variant pas avec la direction. Les valeurs de cette altération sont contenues dans la dernière colonne.

$l$	R	$-\frac{dR}{d\lambda}$	$h$	K	$2\omega$	$\epsilon$
36, 0'	1609096 <sup>mm</sup>	11107,94	1+0,001191	1+0,001191	0"	+ 0,00119
36,30	1597991	11102,62	0628	0636	2	063
37, 0	1586890	11098,14	0141	0153	3	015
37,30	1575794	11094,50	1-0,000272	1-0,000256	3	- 0,00026
38, 0	1564701	11091,72	0607	0591	3	060
38,30	1553610	11089,78	0867	0853	3	086
39, 0	1542521	11088,68	1051	1041	2	105
39,30	1531433	11088,43	1160	1154	1	116
40, 0	1520344	11089,03	1192	1192	0	119
40,30	1509254	11090,47	1148	1154	1	115
41, 0	1498163	11092,76	1028	1039	2	103
41,30	1487069	11095,90	0833	0848	3	084
42, 0	1475971	11099,88	0562	0579	3	057
42,30	1464868	11104,70	0214	0232	4	022
43, 0	1453761	11110,38	1+0,000210	1+0,000194	3	+ 0,00020
43,30	1442647	11116,90	0708	0701	2	070
43,50	1435235	11121,71	1084	1083	0	108
44, 0	1431527	11124,26	1283	1288	1	129

Chaque feuille de la carte sera un véritable levé topographique, l'échelle variant, mais très-lentement avec la latitude, de 8 décimètres moins 1 millimètre à 8 décimètres plus 1 millimètre, pour 4 myriamètres. La longueur de 8 décimètres est celle du grand côté du cadre dans les feuilles de la carte de France.

*Carte d'une zone. Carte d'un fuseau. Cartes ayant pour objet la conservation des aires.*

64. La méthode que nous avons suivie dans la recherche du système de projection le mieux approprié à la représentation d'une contrée particulière ne suppose pas nécessairement que cette contrée soit peu étendue dans les deux sens; on peut l'appliquer à toute la zone comprise entre deux parallèles dont les latitudes ne diffèrent pas trop l'une de l'autre, et aussi à un fuseau limité par deux méridiens dont l'angle n'est pas trop considérable. On développe, dans le premier cas, suivant les puissances de  $s$ , et, dans le second, suivant celles de  $m$ . La condition que les altérations d'angles soient du troisième ordre seulement, et les altérations de distances, du second, suffisent pour déterminer complètement les formules; il ne reste pas, dans celles-ci, de coefficients dont on ait la faculté de disposer pour réduire à son *minimum* la plus grande altération de l'unité de longueur.

65. Pour une zone comprise entre deux parallèles, le mode de projection auquel on se trouve conduit est celui des méridiens rectilignes et des parallèles circulaires définis par les formules (12) et (13); on devait s'y attendre d'après la remarque que nous avons faite à la fin du n° 54.

Appliqué à la zone comprise entre les parallèles de  $37^{\circ}30'$  et  $52^{\circ}30'$ , zone dont fait partie l'Europe centrale, et qui occupe plus du sixième de la surface du globe, le système que nous venons d'indiquer ne produit pas d'altérations au-dessus de  $1'20''$  pour les angles, ni au-dessus de  $\frac{1}{230}$  pour l'unité de longueur. Avec la projection de Bonne, les limites analogues eussent été respectivement  $14^{\circ}40'$  et  $\frac{1}{7}$ .

Pour toute l'Algérie, c'est-à-dire pour le Tell et le Sahara algériens, les limites d'altérations sont, avec notre système,  $3''$  et  $\frac{1}{2000}$ , tandis qu'avec la projection de Bonne elles seraient  $11'$  et  $\frac{1}{600}$ ; et l'on pourrait, sans augmenter les deux premières, placer sur la carte la régence de Tunis et la plus grande partie de l'empire du Maroc.

66. Quand il s'agit d'un fuseau, on trouve que le mode de projection qui remplit les conditions énoncées est celui des formules

$$(16) \quad x = s + \frac{1}{2} r m^2 \sin l, \quad y = r m \left( 1 + \frac{1}{6} m^2 \cos 2l \right).$$

De ces formules on déduit

$$\theta = m^2 \sin l \left( \frac{5}{6} - \sin^2 l \right), \quad h - k = \frac{1}{300} m^2 \cos^4 l.$$

On a d'ailleurs

$$(a - b)^2 = (h - k)^2 + \theta^2, \quad 2\omega = \frac{a - b}{\sin 1''},$$

$\omega$  étant exprimé en secondes. Quant à l'altération de l'unité de longueur, elle est

$$\epsilon = \frac{1}{2} (m \cos l)^2,$$

ou seulement la moitié de cette quantité si l'on suppose l'échelle choisie de manière que les altérations soient deux à deux égales et de signes contraires.

Pour un fuseau de  $15$  degrés on aura, comme limites des altérations,  $1' 20''$  et  $\frac{1}{230}$ ; avec la projection de Bonne, on aurait eu  $7^{\circ} 30'$  et  $\frac{1}{16}$ .

Le territoire de l'Égypte proprement dite se compose

d'une longue vallée encaissée, depuis Assouan jusqu'au Caire, par deux chaînes de montagnes dont les versants extérieurs s'étendent dans de vastes déserts. Il n'y a pas à se préoccuper de ces déserts, dans la construction de la carte ; on doit plutôt songer à l'étendre au sud d'Assouan en remontant le Nil. Nous supposons donc qu'il s'agisse d'une contrée située entre le neuvième et le trente-deuxième degré de latitude avec une étendue en longitude de 5 degrés. Le mode de projection à adopter sera celui des formules (16), lequel donnera pour limite des deux altérations  $5''$  et  $\frac{1}{2000}$ , tandis que la projection de Bonne aurait donné  $25'$  et  $\frac{1}{250}$ .

67. Pour certaines cartes qui ont un but spécial, la condition la plus importante à remplir est la conservation des aires. On peut se proposer de chercher le système de projection qui, tout en ne modifiant celles-ci que de quantités négligeables, réduit à son *minimum* la plus grande altération d'angle. Cette question, que nous ne faisons qu'indiquer, se résoudra par une méthode analogue à celle que nous avons employée dans la résolution de la question inverse.

## CHAPITRE III.

Valeurs numériques des éléments qui permettent d'apprécier les déformations produites par les divers modes de projection dans la construction des Mappemondes.

*Preliminaires.*

68. Parmi les angles qui ont leur sommet en un point quelconque du globe, et leurs côtés tangents à sa surface, celui que la représentation altère le plus se trouve remplacé sur la carte par son supplément (n° 12); ce ne peut donc être l'angle du méridien et du parallèle. Ces deux lignes ne sont pas non plus celles dont les directions correspondent aux valeurs extrêmes du rapport de longueurs, à moins que, sur la carte, elles ne se trouvent perpendiculaires entre elles (n° 18). Ainsi, pour se rendre compte de la déformation produite autour d'un point donné, il ne suffit pas de calculer les trois altérations relatives au méridien et au parallèle de ce point; mais il faut en déduire les demi-axes de l'ellipse indicatrice, qui ne sont autre chose que le *maximum* et le *minimum* du rapport de longueurs (n° 14), et dont le produit donne le rapport des surfaces (n° 18). En divisant leur différence par leur somme, on obtient le sinus de la plus grande altération qu'éprouvent les angles comptés à partir de l'une des tangentes principales (n° 7); enfin, le double de cette altération fait connaître la plus grande altération d'angle (n° 12).

Soient  $l$  la latitude et  $m$  la longitude d'un point de la surface terrestre. Il est permis de faire abstraction de



l'aplatissement dans la recherche des altérations produites autour de ce point, car cela revient à négliger une très-petite fraction de la valeur de chacune d'elles; on peut donc prendre respectivement, pour longueurs des arcs infiniment petits de méridien et de parallèle qui partent du point considéré,  $dl$  et  $\cos l dm$ . Le plus souvent, les longueurs correspondantes de la carte se déduiront immédiatement de la définition du système de projection ou de quelqu'une de ses propriétés; en tout cas, elles seront fournies par les formules du n° 20. Le coefficient de  $dl$  dans l'une, et, dans l'autre, le produit du coefficient de  $dm$  par  $\sec l$  feront connaître les rapports de longueur,  $h$  et  $k$ , sur le méridien et sur le parallèle. On calculera ensuite l'altération  $\theta$  éprouvée par l'angle de ces deux lignes.

Dans l'ellipse indicatrice,  $h$  et  $k$  sont deux demi-diamètres conjugués inclinés l'un sur l'autre de  $\frac{\pi}{2} - \theta$ ; il sera donc facile de déterminer les demi-axes,  $a$  et  $b$ , de cette ellipse, puis le *maximum*,  $\omega$ , de l'altération éprouvée par l'angle que fait, avec la direction de l'un d'eux, une autre direction variable, enfin le rapport  $S$  des éléments superficiels. Par exemple, si l'on pose

$$\text{tang } \lambda = \frac{k}{h}, \quad \sin 2\gamma = \cos \theta \sin 2\lambda,$$

on pourra faire usage des formules

$$\sin \omega = \text{tang} \left( \frac{\pi}{4} - \gamma \right), \quad S = hk \cos \theta,$$

$$a = \sqrt{S \cot \gamma}, \quad b = \sqrt{S \text{tang } \gamma}.$$

En général, nous avons choisi l'échelle de manière qu'au centre de la carte  $S$  soit égal à l'unité.

Nous appellerons *autogonales* les projections qui conservent les angles, et *authaliques* celles qui conservent les aires. Dans les projections autogonales, on a

$$\theta = 0, \quad \omega = 0, \quad h = k = a = b, \quad S = a^2,$$

et, dans les projections authaliques,

$$a = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right), \quad b = \operatorname{cot}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right), \quad S = 1:$$

lorsque, dans ces dernières, les longueurs sont aussi conservées le long des parallèles, on a de plus

$$h = \sec\theta, \quad k = 1, \quad \operatorname{tang}\omega = \frac{1}{2} \operatorname{tang}\theta.$$

69. Les éléments qui figurent dans nos Tableaux sont principalement  $2\omega$ ,  $a$ ,  $b$  et  $S$ ; dans certains cas où les trois derniers se trouvent avoir des valeurs inférieures à l'unité, nous donnons aussi celles de leurs inverses  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\Sigma$ , et quelquefois celles de  $a\beta$ , c'est-à-dire du rapport de  $a$  à  $b$ . Ces éléments suffisent toujours pour l'étude de la déformation produite autour de chaque point, mais non pour la comparaison des longueurs en des points différents de la carte : quand la plus petite des valeurs de  $b$  est égale à un, il est naturel de considérer l'arc infiniment petit auquel elle correspond comme reproduit en vraie grandeur, et les divers *maxima* de l'altération de l'unité de longueur comme représentés par les valeurs de  $a - 1$ ; dans le cas contraire, pour que l'interprétation ne cesse pas d'être exacte, il faut substituer aux valeurs de  $a$  les quotients de leur division par la plus petite valeur de  $b$ ; une remarque analogue s'appliquerait à la comparaison des éléments de surface; c'est pourquoi, dans les Tableaux relatifs à certains modes de projection, on trouvera des colonnes intitulées ( $a$ ) et ( $S$ )

contenant respectivement les rapports des valeurs de  $\alpha$  et de  $S$  aux plus petites valeurs que  $b$  et  $S$  sont susceptibles de prendre dans toute l'étendue de la carte.

Les nombres que nous avons calculés se rapportent en général aux points d'intersection des parallèles de  $15$  en  $15$  degrés de latitude avec les méridiens de  $15$  en  $15$  degrés de longitude, le premier méridien étant celui dont la projection sépare la carte en deux portions symétriques.

70. Parmi les projections que nous considérerons, il y en a six dans lesquelles les parallèles sont représentés par des droites de même direction, les méridiens par d'autres droites perpendiculaires aux premières et ayant entre elles des distances proportionnelles aux différences de longitude; ce sont : la projection de Mercator, le développement cylindrique, la projection des cartes plates carrées, celle des cartes plates parallélogrammatiques et deux projections du P. Braun. Les altérations y sont indépendantes des longitudes, et, pour obtenir toutes celles qui se rapportent à la représentation du globe entier, il suffit de faire varier les latitudes de zéro à  $90$  degrés.

Beaucoup d'autres systèmes se prêtent aussi à la représentation complète de la Terre sur une seule carte, ou à celle d'une portion plus grande qu'un hémisphère, mais avec des altérations d'autant plus fortes que cette portion est plus considérable; pour chacun d'eux nous avons calculé les altérations produites dans la représentation d'un hémisphère seulement. Lorsque cet hémisphère est limité par un méridien, il arrive presque toujours que l'équateur de la carte est rectiligne et joue le rôle d'axe de symétrie, de sorte qu'il suffit de considérer le quart de la carte, et de faire varier les

latitudes ainsi que les longitudes, de zéro à 90 degrés.

Dans une projection centrale effectuée sur le plan de l'équateur ou sous l'aspect polaire, les parallèles de la carte sont des circonférences concentriques, les méridiens sont des droites partant du centre et faisant entre elles des angles égaux à ceux des méridiens du globe; les altérations ne dépendent que de la latitude ou de la distance polaire  $\delta$  qui en est le complément. Dans la projection centrale de même nature effectuée sur l'horizon d'un lieu donné, ce sont les petits cercles perpendiculaires à la verticale de ce lieu et les grands cercles contenant cette verticale qui se trouvent représentés par des circonférences concentriques et des droites concourantes; les altérations sont les mêmes que dans la projection polaire ou équatoriale, seulement elles se rapportent à des points différents; elles seront fournies par les mêmes Tables, pourvu que dans celles-ci on regarde  $\delta$  comme désignant toujours la distance angulaire d'un lieu quelconque à celui qui correspond au centre de la carte. Néanmoins, afin d'avoir des termes de comparaison entre les projections centrales effectuées sur un méridien et les autres projections méridiennes, nous avons déterminé, pour quelques-unes des premières, les valeurs des éléments  $a$ ,  $b$ , ..., de 15 en 15 degrés de longitude et de 15 en 15 degrés de latitude. La première ligne horizontale et la première colonne verticale des Tables qui contiennent ces valeurs reproduisent les nombres relatifs à la projection équatoriale. Pour quatre des projections centrales polaires, nous avons considéré tous les points dont la colatitude  $\delta$  est multiple de 5 degrés.

Dans les perspectives que nous aurons à étudier, le plan du Tableau est perpendiculaire au diamètre mené par le point de vue; ce sont donc des projections centrales. Ce plan est d'ailleurs parallèle à celui du grand

cercle qui limite l'hémisphère à représenter; nous le supposons tangent à cet hémisphère, afin de nous conformer à la convention qui a été faite sur le choix de l'échelle.

Pour étudier les diverses projections au point de vue de la déformation qu'elles produisent, il est naturel de les diviser en trois classes comprenant respectivement les projections autogonales, les projections aulhaliques, enfin celles qui ne conservent ni les angles ni les surfaces, et que nous appellerons projections *aphylactiques*.

*Projections autogonales* ( $\omega = 0, b = a$ ).

71. *Projection de Mercator ou des cartes marines dites cartes réduites* [Tableau I (\*)]. — Les méridiens et les parallèles de la carte sont des droites formant un canevas rectangulaire. L'équateur est développé en vraie grandeur. La condition que les angles soient conservés détermine la distance d'un parallèle de la carte à l'équateur en fonction de la colatitude  $\delta$ ; quand on suppose la Terre sphérique, cette distance est égale au logarithme népérien de  $\tan \frac{\delta}{2}$ .

72. *Projection cylindrique autogonale de Lambert* (Tableaux II). — Les coordonnées rectangulaires des divers points de la Carte sont données par les formules

$$x = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \cos l \sin m}{1 - \cos l \sin m}, \quad \tan y = \tan l \sec m,$$

---

(\*) Les cent quatre-vingt-seize Tableaux numériques auxquels nous renverrons successivement ont été reportés à la fin du Mémoire, dont ils occupent les soixante dernières pages; ils se trouvent répartis en cinquante-deux groupes désignés par des numéros écrits en chiffres romains.

les logarithmes étant ceux du système népérien. On peut déduire cette projection de celle de Mercator en attribuant à l'un des méridiens le rôle que joue l'équateur dans cette dernière.

**73. Projection stéréographique équatoriale** (Tableau III). — C'est la perspective de l'un des deux hémisphères limités par l'équateur sur le plan tangent en celui des deux pôles que contient cet hémisphère, le point de vue étant placé à l'autre pôle.

**74. Projection stéréographique méridienne** (Tableaux IV). — C'est la perspective d'un hémisphère limité par un méridien, le plan du Tableau étant tangent à cet hémisphère et parallèle à ce méridien, et le point de vue étant diamétralement opposé au point de contact.

**75. Projections coniques autogonales de Lambert** (Tableaux V). — Les parallèles de la carte sont des circonférences concentriques, les méridiens des droites partant du centre commun et faisant entre elles des angles proportionnels à ceux des méridiens du globe. Le rapport constant des premiers angles aux autres, que nous appellerons l'*exposant* de la projection, étant désigné par  $n$ , et  $R$  étant le rayon du cercle qui correspond à l'équateur, le rayon  $r$  de celui qui correspond au parallèle de colatitude  $\delta$  est donné par la formule

$$r = R \left( \operatorname{tang} \frac{\delta}{2} \right)^n .$$

L'hémisphère se trouve représenté par un secteur dont le pôle occupe le centre, et dont l'angle  $P$ , exprimé en degrés, est égal à  $360 n$ . Si l'on prenait l'exposant

plus grand que l'unité, il y aurait recouvrement. Dans toutes les projections où il est au contraire plus petit que l'unité,  $a$  passe par un *minimum* lorsque  $\delta$  varie de zéro à 90 degrés; pour chacune de ces projections, nous avons choisi la constante arbitraire  $R$  de manière que ce *minimum* soit égal à 1; la latitude correspondante a été désignée par  $l_0$  dans le premier des Tableaux V. Ces Tableaux se rapportent à 13 valeurs de  $n$ ; la première valeur, savoir  $n = 0$ , donne, avec  $nR = 1$ , la projection de Mercator; la dernière valeur, savoir  $n = 1$ , donne la projection stéréographique équatoriale. Partout dans celle-ci, et partout ailleurs qu'au pôle dans les autres, les angles sont conservés. Pour celle dont l'exposant est  $\frac{2}{3}$ , nous avons calculé de 5 en 5 degrés de latitude les valeurs de  $a$  et de  $S$ .

76. *Projections autogonales à méridiens circulaires, le centre de la carte correspondant à un point de l'équateur* (Tableaux VI). — Dans un canevas orthogonal, les méridiens ne peuvent être circulaires sans que les parallèles le soient; car, si les méridiens de la carte sont des cercles, la droite qui passe par les projections des pôles servira d'axe radical à deux quelconques d'entre eux, et leurs trajectoires orthogonales seront des cercles ayant leurs centres sur cette droite. Cela ne suffit pas pour que la projection soit autogonale; il faut de plus que les angles sous lesquels se coupent les méridiens de la carte soient, avec ceux des méridiens correspondants du globe, dans un rapport constant, que nous appellerons l'*exposant* de la projection. Enfin,  $n$  étant cet exposant, si l'on désigne par  $\delta$  l'angle de la ligne des pôles de la carte avec le rayon de l'un des points où la circonférence décrite sur cette ligne comme diamètre rencontre la projection du

parallèle de colatitude  $\delta$ , on devra avoir

$$\operatorname{tang} \frac{\delta'}{2} = \left( \operatorname{tang} \frac{\delta}{2} \right)^n.$$

Pour  $n = 0$ , on retombe sur la projection de Mercator, et, pour  $n = 1$ , sur la projection stéréographique méridienne. Pour  $n > 2$ , il y aurait recouvrement dans la représentation d'un hémisphère. Aux pôles, par exception, les angles ne sont pas conservés, si ce n'est dans la projection stéréographique. Sur un même parallèle,  $a$  et  $S$  augmentent avec la longitude. Nous donnons, pour vingt et une de ces projections, l'angle  $P$  sous lequel se coupent les demi-méridiens extrêmes, ainsi que les valeurs de  $a$  et de  $S$  relatives à quatre points particuliers.

77. *Projection de Lagrange* (Tableaux VII). — La projection orthomorphe à méridiens circulaires dans laquelle  $a$  et  $S$  varient le plus lentement possible, sur le parallèle et sur le méridien, à partir du point central, est celle qui correspond à  $n = \sqrt{2}$ . L'angle  $P$  y est égal à  $254^{\circ} 33' 30''$ .

78. *Projection autogonale de Littrow* (Tableaux VIII). — Les parallèles et les méridiens sont représentés respectivement par des ellipses et des hyperboles homofocales. Les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque de la carte sont

$$x = \operatorname{tang} l \cos m, \quad y = \operatorname{sec} l \sin m.$$

Sur un même parallèle,  $a$  et  $S$  diminuent à mesure que  $m$  augmente; sur un même méridien, ils augmentent en même temps que  $l$ . Nous donnerons seulement les valeurs qu'ils prennent sur l'équateur, sur le premier et le dernier méridien.



*Projections authaliques* ( $\beta = a$ ,  $S = 1$ ).

79. *Développement cylindrique* (Tableau IX). — On développe le cylindre circonscrit le long de l'équateur. Les méridiens et les parallèles de la carte sont les transformées des génératrices et des sections droites que tracent, sur le cylindre, les plans des méridiens et ceux des parallèles du globe. Le canevas est donc orthogonal et formé par deux systèmes de droites.

80. *Développement cylindrique transverse*. — On projette orthogonalement chaque point du globe sur la surface d'un cylindre qui est circonscrit le long d'un méridien, et que l'on développe ensuite.

Nulles sur ce méridien, les altérations sont les mêmes en tous les points de chacun des petits cercles qui ont leurs plans parallèles au sien. Elles sont fournies par le Tableau relatif au développement cylindrique ordinaire, pourvu que, dans ce Tableau, on considère l'argument  $l$  comme représentant la distance sphérique du petit cercle au méridien de contact. Le même Tableau donne les valeurs des éléments  $2\omega$ ,  $a$ ,  $b$ , ..., pour les divers points de l'équateur, lorsqu'on y considère  $l$  comme représentant la longitude. Enfin, si l'on y remplace  $l$  par  $90^\circ - l$ , il fera connaître les valeurs des éléments pour les divers points du méridien qui est perpendiculaire au premier.

81. *Projections cylindriques authaliques*. — Les méridiens sont représentés par des droites parallèles entre elles, les parallèles par d'autres droites perpendiculaires aux premières. La distance des projections de deux méridiens est dans un rapport constant,  $n$ , avec l'arc d'équateur intercepté par ces deux méridiens; la distance des pro-

jections de deux parallèles est dans le rapport inverse,  $\frac{1}{n}$ , avec celle des plans des deux parallèles.

Pour  $n = 1$ , on retombe sur le développement cylindrique. Quel que soit  $n$ , on a aux pôles  $2\omega = 180^\circ$ ,  $a = \infty$ ,  $b = 0$ . Nous reviendrons sur ces projections dans le Chapitre IV.

**82. Projection centrale authalique équatoriale de Lambert, dite projection de Lorgna (Tableau X).** — Les méridiens sont représentés par des droites concourantes faisant entre elles des angles égaux aux différences de longitudes, les parallèles par des circonférences concentriques ayant pour rayons les distances rectilignes du pôle aux parallèles du globe.

**83. Projection centrale authalique de Lambert (Tableaux XI).** — Les grands cercles qui contiennent la verticale d'un lieu de l'équateur et les petits cercles perpendiculaires à cette ligne remplacent respectivement les méridiens et les parallèles de la projection équatoriale. Quant aux méridiens et aux parallèles de la nouvelle projection, ce sont des courbes du quatrième degré.

**84. Projections coniques authaliques de Lambert.** — Les méridiens de la carte sont des droites concourantes faisant entre elles des angles proportionnels aux différences de longitudes, et les parallèles, des circonférences ayant toutes pour centre le point de concours des méridiens. Le rapport constant de l'angle de deux méridiens de la carte à celui des méridiens correspondants du globe étant désigné par  $n$ , le rayon de chaque parallèle de la carte est, avec la corde qui va du pôle au parallèle correspondant du globe, dans le rapport de 1 à  $\sqrt{n}$ .

En faisant  $n = 1$ , on retrouve la projection du n° 15; en

faisant  $n = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , on obtient celui du numéro suivant. C'est seulement dans le Chapitre IV que nous aurons à considérer d'autres valeurs de  $n$ .

85. *Projection conique authalique périgonale* (Tableau XII). — Nous avons trouvé que, pour rendre aussi faible que possible la plus grande altération d'angle, et par conséquent aussi la plus grande altération de longueur, sur la carte d'un hémisphère dressée d'après le système des projections coniques authaliques, il fallait prendre  $n$  égal à  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . La carte, au lieu d'un cercle entier, forme alors un secteur de  $254^{\circ}33'30''$ . Les altérations sont nulles le long du parallèle qui a pour colatitude  $65^{\circ}32'11''$ .

86. *Projections tronconiques authaliques ou projections d'Albers*. — Elles ne diffèrent des projections coniques authaliques que par l'expression du rayon du parallèle de la carte en fonction de la colatitude. Cette expression est ici

$$r = \sqrt{\frac{2}{n} (C - \cos \delta)},$$

$C$  désignant un nouveau paramètre arbitraire.

En prenant  $C = 1$ , on retrouve les projections coniques. Pour toute autre valeur de  $C$ , le pôle se trouve remplacé par un arc de cercle de grandeur finie, de sorte qu'il n'y a pas lieu de faire usage de ces projections dans la représentation d'un hémisphère.

87. *Projection authalique de Mollweide, dite projection homalographique de Babinet* (Tableaux XIII). — Les méridiens de la carte sont des ellipses ayant toutes

pour axe la droite qui joint les deux pôles; les autres axes sont proportionnels aux longitudes; l'un deux, celui de la demi-ellipse qui correspond à la longitude de 90 degrés, est égal au premier axe. Les parallèles sont représentés par des droites perpendiculaires à celle qui joint les deux pôles; l'équation

$$2l' + \sin 2l' = \pi \sin l$$

détermine l'angle au centre  $l'$  qui correspond à l'arc intercepté entre la projection de l'équateur et celle du parallèle de latitude  $l$  sur le méridien circulaire de la carte.

Outre les Tableaux habituels, nous donnons ici celui des rapports de longueurs sur les parallèles, ainsi que de leurs inverses, lesquels sont indépendants des longitudes. Nous donnons aussi les éléments de la déformation sur le parallèle de 89 degrés de latitude, enfin les valeurs de  $2\omega$  et de  $a$ , de 10 degrés en 10 degrés, sur le méridien qui limite l'hémisphère.

88. *Projection sinusoïdale de Nicolas Sanson, dite projection de Flamsteed* (Tableaux XIV).—Le premier méridien est développé en vraie grandeur suivant une droite, les parallèles suivant d'autres droites perpendiculaires à la première, et sur lesquelles on porte, pour construire par points les projections des méridiens, des longueurs égales aux arcs de parallèles; ces projections sont des sinusoïdes.

Nous rencontrons ici un premier exemple des systèmes de représentation dans lesquels chacun des éléments  $\omega$ ,  $a$ ,  $b$  prend, au pôle, des valeurs différentes suivant que l'on regarde ce point comme appartenant à un méridien ou à un autre. La condition de continuité, que suppose la loi de déformation établie dans le premier Chapitre, ne se trouve pas remplie au pôle par la projection sinus-

oïdale, puisque les deux moitiés d'un même méridien n'y ont pas la même tangente; de là vient que, sur les divers méridiens,  $a$ , par exemple, ne tend pas vers la même limite quand  $l$  s'approche indéfiniment de  $90^\circ$ .

89. *Projections sinusoidales authaliques.* — Le méridien moyen de la carte est une droite, les parallèles d'autres droites perpendiculaires à la première et interceptant sur celle-ci des longueurs proportionnelles aux différences de latitudes. Pour tracer les méridiens par points, on porte, sur les parallèles de la carte, des longueurs proportionnelles aux arcs des parallèles du globe. Le rapport constant  $n$  de la distance de deux parallèles de la carte à la différence de leurs latitudes, et celui de la longueur d'une portion de parallèle de la carte à l'arc correspondant du globe, sont inverses l'un de l'autre.

La projection de Sanson correspond à  $n = 1$ ; la suivante à

$$n = \sqrt[4]{1 + \frac{\pi^2}{4}} = 1,3646\dots$$

90. *Projection sinusoidale authalique périgonale* (Tableau XV). — La valeur précédente de  $n$  est celle que nous avons obtenue en cherchant la projection sinusoidale authalique qui rend aussi faible que possible la plus grande valeur de chaque altération sur une carte de la moitié du globe terrestre.

Les altérations sont les mêmes tout le long de l'équateur et tout le long du méridien moyen; elles correspondent par conséquent aux nombres de la première ligne du Tableau, lequel se rapporte au méridien extrême, qui est celui sur lequel il y a le plus de déformation.

91. *Projection dite de Bonne ou du Dépôt de la Guerre ou de la Carte de France* (Tableau XVI). — Le

premier méridien, ou méridien moyen, est développé en vraie grandeur suivant une droite, et les parallèles suivant des circonférences ayant leurs centres en un même point de cette droite; pour l'un d'entre eux, dit *parallèle moyen*, le rayon est égal à la génératrice du cône circonscrit au globe terrestre le long de ce parallèle. Sur les parallèles de la carte, on prend, à partir du méridien rectiligne, des arcs égaux à ceux des parallèles du globe; les extrémités de ces arcs déterminent les projections des autres méridiens.

Il ne se produit aucune altération sur le méridien moyen ni sur le parallèle moyen. Sur les autres parallèles, les altérations augmentent avec la longitude; aux pôles elles sont indépendantes du choix que l'on peut faire du parallèle moyen; nous donnons les valeurs qui se rapportent à ces points, sur les deux méridiens extrêmes, pour la carte d'un hémisphère et pour celle du globe entier. Ces valeurs correspondent aux plus grandes altérations lorsqu'on prend l'équateur pour parallèle moyen; alors on retombe sur la projection sinusoidale de Nicolas Sanson. Avec tout autre parallèle moyen, on aura des altérations plus fortes. Par exemple, avec le parallèle moyen de 45 degrés de latitude nord, les maxima ont lieu sur le parallèle de  $69^{\circ} 25' 10''$  de latitude sud, et l'on a, à l'intersection de ce parallèle avec le méridien de  $90^{\circ}$  de longitude,

$$\begin{aligned} \theta &= 58^{\circ} 51', & 2\omega &= 79^{\circ} 12', \\ a &= 2,125, & b &= 0,471, & a\beta &= 4,517. \end{aligned}$$

Le parallèle moyen étant encore celui de 45 degrés, on aurait, sur l'équateur et sur les méridiens extrêmes, dans la représentation de l'un des deux hémisphères

limités par l'équateur,

$$\theta = 60^{\circ}23', \quad 2\omega = 82^{\circ}41',$$

$$a = 2,212, \quad b = 0,452, \quad a\beta = 4,892.$$

92. *Projection à méridiens et parallèles rectilignes de M. Collignon* (Tableaux XVII). — Les coordonnées rectangulaires de la projection du point de longitude  $m$  et de colatitude  $\delta$  sont données par les formules

$$x = \sqrt{\pi} \left( 1 - \sqrt{2} \sin \frac{\delta}{2} \right), \quad y = 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} m \sin \frac{\delta}{2}.$$

Les demi-méridiens qui limitent la carte d'un hémisphère dessinent un carré, dont le premier méridien et l'équateur sont les diagonales. C'est à ces diverses lignes que se rapportent les nombres des Tableaux XVII.

93. *Projection dite stéréographique équivalente de M. de Prépetit-Foucault* (Tableaux XVIII). — La projection du point du globe dont la latitude est  $l$  et la longitude  $m$  a pour coordonnées rectangulaires

$$x = \sqrt{\pi} \operatorname{tang} \frac{l}{2}, \quad y = \frac{2}{\sqrt{\pi}} m \cos l \cos^2 \frac{l}{2}.$$

Les parallèles de la carte sont rectilignes. Les altérations sont les mêmes pour tous les points de l'équateur.

94. *Projection authalique de Werner* (Tableau XIX). — Les parallèles de la carte sont des circonférences concentriques ayant pour rayons les distances sphériques de l'un des pôles aux parallèles du globe. Sur ces circonférences, on prend, à partir du premier méridien, qui est rectiligne, des arcs égaux à ceux des parallèles terrestres, ce qui détermine les autres méridiens.

Nulles tout le long du méridien moyen, les altérations croissent avec la longitude. Sur chaque méridien, elles augmentent, à partir du pôle dont la projection sert de centre aux projections des parallèles, jusqu'au point de l'autre hémisphère qui a pour latitude  $67^{\circ}12'10''$ . Ainsi, dans la carte de l'un des deux hémisphères limités par l'équateur, elles atteindraient leurs plus grandes valeurs à l'intersection de cette ligne avec le méridien de  $180$  degrés de longitude. On a, en ce point,

$$2\omega = 90^{\circ}, \quad a = 2,414, \quad b = 0,414, \quad a\beta = 5,828.$$

Sur la carte d'un hémisphère limité par un méridien, la projection du pôle nord servant de centre aux projections des parallèles, les *maxima* ont lieu pour

$$l = -67^{\circ}12'10'', \quad m = 90^{\circ}.$$

### *Projections aphylectiques.*

95. *Projection des cartes plates carrées* (Tableau XX). — Les méridiens sont représentés par des droites parallèles entre elles, les parallèles par d'autres droites perpendiculaires aux premières. L'équateur et les méridiens se trouvent développés en vraie grandeur.

Les altérations sont indépendantes des longitudes.

96. *Projection de Cassini*. — On peut la définir en remplaçant, dans la projection précédente, l'équateur et les parallèles par un méridien convenu et par les petits cercles qui ont leurs plans parallèles à celui de ce méridien.

Le même Tableau est applicable, pourvu qu'on y considère  $l$  comme représentant la distance sphérique d'un point quelconque du globe au méridien convenu.



97. *Projections des cartes plates parallélogrammatiques.* — Ces projections diffèrent de celle des cartes plates carrées en ce que le degré de longitude, au lieu d'être pris égal à celui de l'équateur, est mesuré sur un parallèle déterminé. Comme exemple, nous avons choisi celle dans laquelle le degré de l'équateur de la carte est égal à celui du parallèle de 45 degrés sur le globe (Tableau XXI).

98. *Projection stéréographique à cylindre du P. Braun* (Tableau XXII). — Le canevas ne diffère de celui de la projection de Mercator que par les distances mutuelles des parallèles de la carte. Il résulte du développement d'un cylindre circonscrit au globe le long de l'équateur, et sur lequel on a pris la perspective de chaque point, le point de vue se déplaçant sur l'équateur de manière à se trouver toujours sur le méridien du point considéré, mais dans l'autre hémisphère.

Les altérations sont indépendantes des longitudes.

99. *Projection de Mercator modifiée du P. Braun* (Tableau XXIII). — On l'obtient en rapprochant du centre le point de vue de la projection stéréographique à cylindre de manière que sa distance à ce centre ne soit plus que 0,4 du rayon.

Les altérations sont indépendantes des longitudes.

100. *Développements coniques* (Tableaux XXIV). — On imagine un cône ayant pour axe la ligne des pôles, et on le développe. Les plans des méridiens et ceux des parallèles coupent le cône suivant des génératrices et suivant des circonférences, dont les transformées figurent les méridiens et les parallèles de la carte. Nous avons considéré quatre de ces projections : dans la première, le cône a son sommet au pôle et pour base

l'équateur; dans la seconde, il passe par les parallèles de 15 et de 75 degrés; dans la troisième, il est déterminé par les parallèles qui ont pour latitudes 22° 30' et 67° 30'; enfin, dans la quatrième, il est circonscrit au globe le long du parallèle de 45 degrés. Si l'on fait successivement

$$n' = 0, \quad n' = \frac{1}{3}, \quad n' = \frac{1}{2}, \quad n' = 1,$$

on pourra définir les quatre développements en disant que le cône contient les deux parallèles qui ont, l'un pour latitude, l'autre pour colatitude  $\frac{n' \pi}{8}$ . Les quatre angles au sommet sont droits.

#### 101. *Développements de perspectives épiconiques.*

— On prend les perspectives des divers points de la surface terrestre sur un cône de révolution dont l'axe coïncide avec la ligne des pôles, le point de vue étant situé sur cette ligne, puis on développe le cône.

Dans les *développements de perspectives gnomoniques épiconiques*, le point de vue est au centre du globe. Le Tableau XXV se rapporte à celle de ces projections dans laquelle le cône est circonscrit à la sphère suivant le parallèle de 30 degrés de latitude; on a choisi l'échelle de manière que les surfaces se trouvent conservées sur l'équateur.

Dans la *projection stéréographique à cône* du P. Braun, le point de vue est placé à l'un des pôles et le cône est le même que celui de la projection précédente. Sur le parallèle de 30 degrés de latitude, il ne se produit pas d'altération. Sur l'équateur, on a

$$a = 1,098, \quad b = 0,804, \quad 2\omega = 17^{\circ}50',$$

et au pôle,

$$a = 3, \quad b = 1,5, \quad 2\omega = 38^{\circ}57'.$$

#### 102. *Projection stéréographique méridienne mo-*

*difiée* (Tableaux XXVI). — Les parallèles de la carte se tracent comme ceux de la projection stéréographique méridienne; on obtient les méridiens en divisant la droite qui représente l'équateur en parties proportionnelles aux différences de longitude, puis en faisant passer des circonférences par les points de division et par les projections des deux pôles.

En chaque point, la plus grande altération d'angle ne dépend que de la longitude.

103. *Projection atractozonique* (Tableau XXVII). — Il est impossible de conserver partout les surfaces sur une projection dans laquelle les méridiens et les parallèles sont représentés par des cercles se coupant à angle droit; nous avons cherché à faire en sorte qu'il n'y ait d'altération ni dans les aires des zones comprises entre les parallèles, ni dans celles des fuseaux formés par les méridiens. Soit  $l'$  l'angle au centre de l'arc intercepté, sur la circonférence qui limite la carte de l'hémisphère, par la projection de l'équateur et celle du parallèle de latitude  $l$ ; soit  $m'$  l'angle sous lequel se coupent la projection du méridien qui a pour longitude  $m$  et celle du premier méridien;  $l'$  et  $m'$  seront fournis par les deux équations

$$\sin 2l' - 2l' \cos 2l' = \pi \sin l \sin^2 l',$$

$$2m' - \sin 2m' = 2m \sin^2 m',$$

qu'il est facile de réduire en Tables. Nous donnons les valeurs de  $l'$  et  $m'$  qui correspondent à des latitudes et à des longitudes multiples de 15 degrés.

104. *Projection polyconique rectangulaire des Américains* (Tableaux XXVIII). — Le premier méridien et l'équateur sont développés en vraie grandeur suivant deux droites perpendiculaires entre elles. Chaque paral-

lèle est représenté par un cercle dont le centre se trouve sur la première de ces deux droites, et dont le rayon est égal à la génératrice du cône circonscrit à la Terre suivant le parallèle. Les méridiens de la Carte sont des trajectoires orthogonales des cercles ainsi obtenus. Ces conditions donnent, pour les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque de la carte,

$$x = l + \frac{m^2 \sin 2l}{4 + m^2 \sin^2 l}, \quad y = \frac{4m \cos l}{4 + m^2 \sin^2 l}.$$

Dans les projections aphyllactiques qui ont été examinées jusqu'à présent, les méridiens et les parallèles de la carte se coupent à angle droit; il n'en sera plus de même dans les suivantes, si ce n'est dans les projections centrales sous l'aspect polaire, que nous étudierons en dernier lieu.

105. *Projection d'Apianus* (Tableaux XXIX). — Les parallèles de cette projection sont les mêmes que ceux des cartes plates. Le premier méridien est représenté par une droite, et celui qui limite l'hémisphère, par la circonférence décrite sur cette droite comme diamètre. Les autres demi-méridiens ont pour projections des arcs de cercle divisant l'équateur rectiligne de la carte en parties proportionnelles aux différences de longitude.

Les angles et les distances sont conservés le long de l'équateur.

Les deux Tableaux se rapportent au premier et au dernier méridien.

106. *Projection polyconique ordinaire des Américains* (Tableaux XXX). — Le premier méridien se développe en vraie grandeur suivant une droite. Les paral-

lèles de la carte sont des circonférences ayant leurs centres sur cette droite, et pour rayons les génératrices des cônes circonscrits au globe suivant les parallèles eux-mêmes. Sur ces circonférences on porte des longueurs égales aux arcs des parallèles terrestres, d'où résulte le tracé par points des projections des divers méridiens.

On a partout  $k = 1$ . Dans la représentation d'un hémisphère, le maximum de  $\theta$  est  $7^{\circ}56'$ ; il a lieu pour  $l = 41^{\circ}41'$ ,  $m = 90^{\circ}$ . Le minimum de  $b$  est 0,9844; il a lieu pour  $l = 47^{\circ}$ ,  $m = 90^{\circ}$ .

107. *Projection de Loritz* (Tableaux XXXI). — Les méridiens sont ceux de la projection d'Apianus, et les parallèles, ceux de la projection orthographique.

Les altérations ont les mêmes valeurs pour tous les points de l'équateur.

108. *Projection de Nicolosi* (Tableaux XXXII). — Les méridiens sont ceux de la projection d'Apianus. Les parallèles sont aussi des circonférences; ces dernières passent par les points qui divisent le premier méridien et les deux demi-méridiens extrêmes en parties proportionnelles aux différences de latitude.

Soient  $Q$  la distance au centre de la carte du centre de l'une des circonférences qui forment le canevas, et  $R$  le rayon de cette circonférence, le rayon du méridien extrême étant pris pour unité : nous donnons les valeurs de  $Q$  et de  $R$  pour les parallèles de 5 en 5 degrés de latitude et pour les méridiens de 5 en 5 degrés de longitude, les valeurs de  $\theta$  pour les points d'intersection de ces méridiens et de ces parallèles, enfin celles de  $h$ , de  $k$  et des éléments  $2\omega$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $S$ ,  $(a)$ ,  $\omega$ , mais de 15 en 15 degrés seulement.

109. *Projection de l'Astronomie populaire d'Arago*

(Tableaux XXXIII). — Les méridiens de la carte sont ceux de la projection de Mollweide, et les parallèles, ceux des cartes plates carrées.

Les rapports de surfaces sont indépendants des longitudes.

110. *Seconde projection du P. Fournier* (Tableaux XXXIV). — Les méridiens de la carte sont ceux qui ont été adoptés depuis par Mollweide. Les parallèles sont les mêmes que dans la projection orthographique.

Les rapports de surfaces ne dépendent que de la latitude.

Les altérations ont les mêmes valeurs pour tous les points de l'équateur.

111. *Première projection du P. Fournier* (Tableaux XXXV). — Le canevas est formé par les méridiens elliptiques de la projection précédente et les parallèles de celle de Nicolosi.

112. *Projection de Schmidt* (Tableaux XXXVI). — Les méridiens de la carte sont les ellipses des projections du P. Fournier. Pour tracer les parallèles, on divise les périmètres de ces ellipses en parties proportionnelles aux différences de latitude, et l'on joint, par un trait continu, les points de division correspondants.

Au centre de la carte, il n'y a pas d'altération.

113. *Projection polyconique équidistante*. — Le parallèle moyen et les méridiens de la carte se tracent comme dans la projection polyconique ordinaire. Sur chacun de ces méridiens, on prend ensuite, à partir du parallèle moyen, des longueurs égales aux arcs de méridien du globe, ce qui permet de construire les parallèles par points.

Si le pôle figure sur la carte, il y sera représenté, non par un point, mais par un arc de courbe.

114. *Projection de Guillaume Postel sur un méridien* (Tableaux XXXVII). — C'est la projection centrale dans laquelle les distances sphériques des petits cercles perpendiculaires à la verticale se trouvent conservées sur la carte. On y a, en chaque point,

$$b = 1, \quad S = a.$$

115. *Projection gnomonique méridienne* (Tableaux XXXVIII). — La projection gnomonique est la perspective prise du centre de la sphère, de sorte que tout grand cercle y est représenté par une droite.

116. *Perspective périmécoïque sur un méridien* (Tableaux XXXIX). — Nous avons trouvé que pour réduire à son *minimum* la plus grande altération de longueur dans la perspective d'un hémisphère, il faut placer le point de vue en dehors de l'hémisphère non représenté, et à une distance du centre égale au côté du décagone régulier étoilé inscrit dans un grand cercle.

117. *Projection de La Hire sur un méridien* (Tableaux XL). — C'est une perspective dans laquelle le point de vue se trouve en dehors de la sphère, et à une distance de la surface égale au sinus de 45 degrés.

118. *Perspective périhalique méridienne* (Tableaux XLI). — Nous avons trouvé que, pour réduire à son minimum la plus grande altération de surface dans la perspective d'un hémisphère, il faut placer le point de vue en dehors de l'hémisphère non représenté, et à une distance de la surface égale à 1,148, l'unité étant le rayon terrestre.

119. *Projection orthographique méridienne* (Tableaux XLII). — C'est la projection orthogonale ordinaire de la Géométrie descriptive.

On a, en chaque point,

$$a = 1, \quad S = b, \quad \Sigma = \beta.$$

*Projections centrales.*

120. *Projections de Lambert, de Guillaume Postel et de M. Airy* (Tableaux XLIII). — Nous avons dit que, pour étudier la déformation produite par les projections centrales, il suffit de les considérer sous l'aspect polaire. L'une d'elles conserve les angles : c'est la projection stéréographique ; une autre conserve les surfaces : c'est la projection de Lambert. Les Tableaux relatifs à ces deux dernières figurent déjà parmi ceux des projections autogonales ou parmi ceux des projections authaliques ; néanmoins nous les reproduisons ici afin de les rapprocher de ceux des autres projections centrales.

En laissant d'abord de côté les perspectives, nous avons à nous occuper de la projection authalique de Lambert, de la projection de Guillaume Postel et de la projection de M. Airy. Celle-ci est la seule dont nous n'ayons pas encore donné la définition : La circonférence qui représente le parallèle de colatitude  $\delta$  y a pour rayon

$$\operatorname{tang} \frac{\delta}{2} + 2 \cot \frac{\delta}{2} \log \sec \frac{\delta}{2},$$

les logarithmes étant ceux du système népérien.

121. *Perspectives* (Tableaux XLIV). — Pour qu'une perspective se prête à la représentation d'un hémisphère tout entier, sans qu'il y ait recouvrement, il faut que le point de vue se trouve au delà du centre par rapport au



pôle de cet hémisphère. En le plaçant au pôle opposé, on obtient la projection stéréographique, qui conserve les angles. Si on l'écarte de cette position, soit en le rapprochant du centre, soit en l'éloignant dans le sens opposé, les altérations d'angles deviennent de plus en plus fortes, tandis que les altérations de surfaces augmentent dans le premier cas, et diminuent dans le second. A l'exception de la projection gnomonique, qui a un but spécial, nous devons donc nous borner à considérer les perspectives dans lesquelles le point de vue se trouve sur le prolongement du rayon mené au pôle de l'hémisphère non représenté. Chacune sera caractérisée par la distance correspondante,  $D$ , du centre au point de vue, distance que nous évaluerons en prenant le rayon pour unité. Les perspectives que nous avons étudiées sont les suivantes :

*Projection gnomonique*;  $D = 0$ .

*Projection stéréographique*;  $D = 1$ .

*Projection du capitaine Clarke*;

$$D = 1 + \frac{11}{30} = 1,3666\dots$$

*Projection de Sir Henri James*;  $D = 1 + \frac{1}{2} = 1,5$ .

*Perspective qui correspond à*  $D = \frac{\pi}{2} = 1,57079\dots$

*Première projection de Parent*;  $D = 1,595$ .

*Perspective qui correspond à*  $D = 1,6$ .

*Perspective périmécoïque*;

$$D = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) = 1,6180\dots$$

*Projection de Lowry*;  $D = 1,69$ .

*Projection de La Hire*;  $D = 1 + \sin 45^\circ = 1,7071\dots$

*Deuxième projection de Parent ;*

$$D = \sqrt{3} = 1,7321\dots,$$

*Perspective qui correspond à  $D = 2$ .*

*Perspective qui correspond à  $D = 2,1$ .*

*Troisième projection de Parent ;  $D = 2,105$ .*

*Perspective qui correspond à*

$$D = 2 + \frac{1}{10}\sqrt{2} = 2,1414\dots$$

*Perspective périalique ;  $D = 2,148$ .*

*Perspective qui correspond à*

$$D = 1 + \sqrt{3} = 2,7321\dots$$

*Projection orthographique ;  $D = \infty$ .*

Dans le dernier des Tableaux XLIV,  $\delta_p$  représente la valeur de  $\delta$  pour laquelle  $S$  atteint son *maximum*, et  $S_p$  la valeur de ce *maximum*.

La perspective périmécoïque diffère peu de celle qui correspond à  $D = 1,6$ .

On obtiendrait, sans erreur sensible, la perspective périalique en plaçant le point de vue à une distance de la surface de la sphère égale au rayon augmenté de la dixième partie du côté du carré inscrit dans un grand cercle.

122. Les Tableaux XLV donnent, pour la projection centrale aulhalique de Lambert, pour la projection de Guillaume Postel, pour la projection stéréographique, pour la perspective périmécoïque et pour la perspective périalique, les valeurs des éléments  $2\omega$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $S$ , etc. . . . qui correspondent à des colatitudes multiples de 5 degrés.

123. Les groupes de Tableaux I à XLV permettent d'étudier les déformations produites par les divers modes de

projection, de comparer ces modes de projection entre eux, enfin de choisir, suivant le but qu'on se propose, celui qu'il convient d'adopter pour la représentation d'un hémisphère. Nous reviendrons sur ce dernier point à la fin du Chapitre suivant.

---

## CHAPITRE IV.

Résultats numériques relatifs aux cartes de portions du globe moindres qu'un hémisphère. — Choix d'un mode de projection.

*Résultats numériques.*

124. Les groupes de Tableaux I à XLV sont à la rigueur suffisants pour l'étude de la déformation produite par les divers modes de projection dans la représentation d'un hémisphère, car en général ils font connaître les éléments de cette déformation pour 145 points particuliers. S'il s'agit d'étudier un mode de projection en vue de la représentation d'une région de moindre étendue, on pourra, dans les mêmes Tableaux, les éléments de la déformation pour ceux d'entre les 145 points qui se trouveront situés à l'intérieur de cette région, et de cette manière on se procurera encore des notions précises sur la déformation produite; mais ici ces notions seront insuffisantes, parce qu'elles se rapporteront à des points relativement trop éloignés les uns des autres et trop éloignés aussi des limites de la région. Si nombreuses qu'elles soient, les valeurs que nous avons données précédemment et celles que nous leur ajouterons bientôt ne le sont donc pas encore assez, et il y aurait utilité à en calculer beaucoup d'autres. Le travail ne sera complet qu'autant que les résultats obtenus permettront de tracer sur des cartes à grande échelle, et pour chaque mode de projection, des courbes d'égaux altérations suffisamment rapprochés. A la fin du Chapitre, nous reviendrons sur

la construction de ces cartes et l'usage que l'on peut en faire dans le choix d'un système de projection.

Nous avons dit que la plupart des projections étaient susceptibles d'être réparties en groupes dans lesquels elles se distinguent les unes des autres par les valeurs attribuées à un paramètre; chaque groupe comprend ainsi une infinité de projections, et il serait impossible d'effectuer pour toutes le travail que nous avons indiqué tout à l'heure; mais il suffira de considérer un certain nombre d'entre elles. On a vu par exemple, dans le groupe des perspectives, qu'il y avait lieu de se borner à celles pour lesquelles la distance du point de vue au centre de la sphère se trouve comprise entre deux limites assez voisines, et que les altérations ne variaient pas très rapidement avec cette distance.

Dans chaque groupe, il y a surtout intérêt à déterminer les projections qui sont périgonales, périmécoïques ou périhaliques pour les cartes de certaines portions du globe, c'est-à-dire celles qui produisent sur ces cartes, pour les altérations d'angles, de longueurs ou de surfaces, des *maxima* moins élevés, que les autres projections du même groupe. C'est ce que nous avons fait dans le Chapitre précédent pour la carte d'un hémisphère et ce que nous ferons dans celui-ci pour les cartes de zones d'une moindre étendue. Les solutions seront réunies en Tableaux ainsi que les altérations *maxima* correspondantes. D'autres Tableaux feront connaître les valeurs des éléments de la déformation, calculées de 5 en 5 degrés, pour un certain nombre des projections obtenues. Nous joindrons à ces renseignements quelques résultats numériques relatifs à d'autres projections.

125. *Projections coniques autogonales* (Tableaux XLVI). — Dans les projections autogonales à mé-

ridiens rectilignes ou à méridiens circulaires, nous avons désigné par  $n$  le rapport constant de l'angle de deux méridiens de la Carte à l'angle correspondant du globe (n° 75). Les valeurs  $\frac{2}{3}$ , 0,8 et 0,807 attribuées à  $n$  déterminent respectivement trois projections coniques autogonales qui sont périhaliques, et par conséquent aussi périmécoïques, pour les trois zones comprises, la première entre l'équateur et le parallèle de 75 degrés de latitude, la seconde entre les parallèles de 40 et de 65 degrés, la troisième entre les parallèles de 35 et de 70 degrés. Sur la carte de cette dernière zone, l'angle des demi-méridiens extrêmes est de 288 degrés et le parallèle le long duquel les altérations se trouvent nulles a pour latitude  $53^{\circ} 48' 10''$ ; nous avons donné dans le Chapitre III les nombres analogues relatifs aux deux autres zones.

126. *Projections autogonales à méridiens circulaires* (Tableaux XLVII). — On a vu (n° 76) que dans la représentation d'un hémisphère limité par un méridien, le rapport de longueurs et le rapport de surfaces augmentent avec la longitude. La manière dont ils varient avec la latitude sur le méridien rectiligne de la carte dépend de  $n$  : pour les valeurs de  $n$  non supérieures à un,  $a$  augmente de l'équateur au pôle; pour les quatre valeurs qui suivent dans celles que nous avons considérées,  $a$  augmente d'abord, puis diminue jusqu'à zéro; enfin, pour les six dernières,  $a$  diminue constamment de l'équateur au pôle. Si, dans la représentation de l'hémisphère, on fait abstraction des deux calottes sphériques que limitent les parallèles de 75 degrés de latitude, la plus faible valeur de  $a$  correspondra, dans les huit dernières projections, à  $l = 75$  degrés,  $m = 0$ ; c'est pourquoi nous l'avons prise comme unité, et nous avons reproduit,

avec cette modification, les huit dernières lignes des Tableaux VI.

127. *Projections cylindriques authaliques* (Tableaux XLVIII). — Nous considérons celles de ces projections qui sont périgonales pour les zones limitées par deux parallèles dont les latitudes  $l'$ ,  $l''$  sont des multiples de 10 degrés inférieurs à 40 degrés. Nos Tableaux, qui sont à double entrée, donnent les valeurs correspondantes de  $n$  (n° 81), de  $\frac{1}{n}$ , de la latitude  $l_0$  du parallèle le long duquel il n'y a pas d'altération, ainsi que les *maxima* de  $2\omega$ , de  $a$ , de  $(a)$  et enfin les *minima* de  $b$ , pour toute l'étendue de la carte. Ainsi qu'on pourra le voir par les Tableaux du numéro suivant, quelques-unes de ces projections sont moins avantageuses que les projections coniques authaliques; il en serait ainsi, à plus forte raison, pour des zones contenant des points situés à plus de 40 degrés de l'équateur.

128. *Projections coniques authaliques* (Tableaux XLIX). — Nous appelons  $\vartheta'$ ,  $\vartheta''$  les colatitudes des parallèles extrêmes de la zone pour laquelle chaque projection est périgonale;  $\vartheta_0$  est celle du parallèle le long duquel ne se produit aucune altération. Le paramètre  $n$  est égal à  $\cos^2 \frac{\vartheta_0}{2}$ ; il varie ici de 1 à  $\frac{1}{2}$ ; les valeurs de  $\frac{1}{n}$  qui correspondent à des zones à une seule base sont les mêmes que celles de  $(a)$  dans la première ligne ou dans la première colonne de l'avant-dernier Tableau. Le dernier Tableau se rapporte à quelques zones non comprises dans les Tableaux précédents.

129. *Projections tronconiques authaliques*. — Les plus grandes altérations d'angles et de longueurs sont les

mêmes dans la projection tronconique authalique qui est périgonale pour la zone comprise entre les deux parallèles de colatitudes  $\delta'$ ,  $\delta''$ , et dans la projection conique authalique qui est périgonale pour la zone à une base limitée par le parallèle de colatitude  $\delta'' - \delta'$ . Nous renverrons donc ici, pour les valeurs *maxima* de  $a$  et de  $2\omega$  aux Tableaux qui ont été donnés à propos des projections coniques authaliques.

Dans la projection tronconique authalique qui est périgonale pour la zone comprise entre les parallèles de colatitude  $\delta'$ ,  $\delta''$ , le rapport  $a$  est égal à l'unité sur deux parallèles intermédiaires dont nous désignerons les colatitudes par  $\delta_0$  et  $\delta_1$ ; ce même rapport atteint sa plus grande valeur  $a_\mu$  sur un parallèle dont la colatitude  $\delta_\mu$  est intermédiaire entre  $\delta_1$  et  $\delta_0$ , et cette plus grande valeur est précisément égale à celle que prend  $a$  sur les deux parallèles extrêmes. Lorsque  $\delta$  augmente de  $\delta'$  à  $\delta_0$ ,  $a$  diminue de  $a_\mu$  à l'unité;  $\delta$  augmentant de  $\delta_0$  à  $\delta_\mu$ ,  $a$  augmente de 1 à  $a_\mu$ ;  $\delta$  augmentant de  $\delta_\mu$  à  $\delta_1$ ,  $a$  diminue de  $a_\mu$  à l'unité; enfin,  $\delta$  augmentant de  $\delta_1$  à  $\delta''$ ,  $a$  augmente de 1 à  $a_\mu$ . La plus grande altération d'angle  $2\omega$  varie d'ailleurs dans le même sens que  $a$ , et son maximum  $2\omega_\mu$  se produit en même temps que celui de  $a$ . Les colatitudes sont d'ailleurs comptées à partir de celui des deux pôles pour lequel  $\delta' + \delta''$  est plus petit que  $\pi$ .

Le *maximum*  $a_\mu$  est nécessairement moins élevé ici que dans la projection conique authalique qui serait périgonale pour la même zone, car, dans les projections tronconiques, on dispose de deux paramètres, savoir, le rapport constant  $n$  de l'angle de deux méridiens de la carte à celui des méridiens correspondants du globe, et le rayon  $\rho$  de la circonférence par un arc de laquelle le pôle trouve remplacé sur la carte. Les deux projections se confondent dans le cas seulement où la zone que l'on



considère est à une base, c'est-à-dire pour  $\delta' = 0$ . Quand  $\delta'$  et  $\delta''$  sont supplémentaires, c'est-à-dire quand les deux parallèles extrêmes sont égaux, la projection tronconique se transforme en une projection cylindrique aouthalique, savoir celle qui est périgonale pour la zone comprise entre l'équateur et l'un des deux parallèles. Voici quelques exemples.

*Premier exemple.*

$$\begin{aligned} \delta' &= 15^\circ, & \delta_0 &= 25^\circ 3' 20'', & n &= 0,1736, \\ \delta'' &= 145^\circ, & \delta_1 &= 73^\circ 57' 30'', & \rho &= 2,2054, \\ a_\mu &= 1,538, & \delta_\mu &= 65^\circ 44' 20'', & 2\omega_\mu &= 47^\circ 33'. \end{aligned}$$

*Deuxième exemple.*

$$\begin{aligned} \delta' &= 15^\circ, & \delta_0 &= 19^\circ 50' 50'', & n &= 0,6088, \\ \delta'' &= 90^\circ, & \delta_1 &= 73^\circ 55' 30'', & \rho &= 0,3404, \\ a_\mu &= 1,123, & \delta_\mu &= 39^\circ 53' 10'', & 2\omega_\mu &= 13^\circ 14'. \end{aligned}$$

*Troisième exemple.*

$$\begin{aligned} \delta' &= 15^\circ, & \delta_0 &= 18^\circ 6' 30'', & n &= 0,8192, \\ \delta'' &= 55^\circ, & \delta_1 &= 46^\circ 32' 30'', & \rho &= 0,1518, \\ a_\mu &= 1,032, & \delta_\mu &= 29^\circ 20' 30'', & 2\omega_\mu &= 3^\circ 34'. \end{aligned}$$

*Quatrième exemple.*

$$\begin{aligned} \delta' &= 55^\circ, & \delta_0 &= 64^\circ 50' 0'', & n &= 0, \\ \delta'' &= 125^\circ, & \delta_1 &= 115^\circ 10' 0'', & \rho &= \infty, \\ a_\mu &= 1,105, & \delta_\mu &= 90^\circ 0' 0'', & 2\omega_\mu &= 11^\circ 25'. \end{aligned}$$

Comme les deux parallèles extrêmes sont également distants de l'équateur, on a ici une projection cylindrique.

*Cinquième exemple.*

$$\begin{aligned} \delta' &= 15^\circ, & \delta_0 &= 19^\circ 4' 50'', & n &= 0,7071, \\ \delta'' &= 75^\circ, & \delta_1 &= 62^\circ 1' 20'', & \rho &= 0,8774, \\ a_\mu &= 1,075, & \delta_\mu &= 35^\circ 15' 50'', & 2\omega_\mu &= 8^\circ 14'. \end{aligned}$$

*Sixième exemple.*

$$\delta' = 35^\circ, \quad \delta_0 = 42^\circ 37' 50'', \quad n = 0,3420,$$

$$\delta'' = 105^\circ, \quad \delta_1 = 92^\circ 57' 50'', \quad \rho = 1,5414,$$

$$a_\mu = 1,105, \quad \delta_\mu = 65^\circ 19' 20'', \quad 2\omega_\mu = 11^\circ 25'.$$

Quand on fait abstraction des terres situées au delà du  $75^\circ$  degré de latitude nord, la première des zones que nous venons de prendre comme exemples renferme tous les continents, la deuxième l'Asie, la troisième l'Europe, la quatrième l'Afrique, la cinquième l'Amérique du Nord et la sixième l'Amérique du Sud, les colatitudes étant comptées, pour cette dernière, à partir du pôle austral. Mais il est clair que, si l'on voulait appliquer les projections d'Albers à la représentation de l'Afrique ou à celle de l'une des deux Amériques, ce n'est pas à l'un des pôles géographiques qu'il faudrait placer le pôle de la projection; en choisissant convenablement ce dernier point on atténuerait notablement les valeurs des plus grandes altérations; seulement on ne pourrait les rendre que de très-peu inférieures à celles que produisent les projections coniques authaliques, ainsi qu'on s'en convaincra en examinant la forme de chacune des trois portions de la surface terrestre dont nous venons de parler.

130. *Projection dite de Bonne* (Tableau L).

131. *Projection polyconique ordinaire des Américains*. — Lorsqu'on l'applique à la carte de France, en prenant le méridien de Paris comme méridien moyen, on trouve que les plus fortes altérations se produisent vers l'île d'Ouessant (longitude  $7^\circ, 5$ , latitude  $48^\circ, 5$ ). En ce point l'angle le plus altéré l'est de 13 minutes; la plus grande altération de longueur y est égale à 0,0038 ou

$\frac{1}{266}$ , et l'altération de surface  $y$  est représentée par le même nombre.

132. *Perspectives périmécoïques pour diverses zones à une seule base* (Tableau LI) — Nous donnons d'abord les distances  $D$  du point de vue au centre de la sphère pour les calottes dont les rayons sphériques,  $\Delta$ , sont des multiples de 5 degrés, jusqu'à 50 degrés, puis les éléments de la déformation pour les perspectives qui correspondent aux rayons de 10, 20, 25, 30, 40 et 50 degrés.

133. *Perspectives périaliques pour les mêmes zones* (Tableaux LII). — Dans le premier Tableau,  $\delta_{\mu}$  représente la distance polaire du parallèle sur lequel se produit le *maximum*  $S_{\mu}$  de  $S$ .

#### *Choix d'un mode de projection.*

134. Certaines cartes construites en vue d'un but spécial exigent un mode de projection déterminé : ainsi, les conditions auxquelles doivent satisfaire les cartes marines ne se trouvent remplies que dans le système de Mercator ; pour que les cartes de la Lune représentent cet astre tel que nous le voyons, il faut les tracer à l'aide de la projection orthographique ; on aura recours à la projection gnomonique si l'on veut transformer en lignes droites toutes les circonférences de grands cercles. Dans ces divers cas, on n'a pas à se préoccuper de choisir un mode de projection plutôt qu'un autre en vue de diminuer la déformation.

La plupart du temps, au contraire, une carte géographique n'a d'autre objet que de représenter assez fidèlement une portion de la surface terrestre ; en adoptant un système de projection convenable, on peut alors

atténuer les altérations dans certaines régions de la carte, ou bien les atténuer et même les détruire sur certaines lignes, ou bien encore faire en sorte qu'elles n'atteignent nulle part des valeurs trop considérables. Le choix dépendra de celles de ces conditions auxquelles on attribuera le plus d'importance; il variera nécessairement avec la forme et l'étendue de la contrée dont il s'agit de dresser la carte.

135. Supposons qu'on n'ait aucune raison d'atténuer la déformation en certains points plutôt que dans les autres, mais que l'on se propose d'abaisser la limite supérieure à laquelle elle peut atteindre; supposons de plus que la portion du globe à représenter soit un hémisphère entier. Les conditions ainsi énoncées excluent tout d'abord les projections dans lesquelles la circonférence de grand cercle qui limite l'hémisphère ne serait pas figurée sur la carte par la totalité d'un contour fermé; elles excluent entre autres les projections cylindriques et coniques, où certains points très-éloignés les uns des autres sur la carte correspondent à des points de la surface terrestre infiniment voisins. Cependant, bien que ramenée à des termes déjà plus précis, la question en comprend encore plusieurs autres : ou bien on voudra conserver les angles et réduire autant que possible la plus grande altération de surface; ou bien on voudra conserver les surfaces et réduire autant que possible la plus grande altération d'angle; ou bien enfin on voudra réduire autant que possible la plus grande altération de longueur.

136. Des projections autogonales connues, la projection stéréographique est la seule dans laquelle le rapport de longueurs, et par conséquent le rapport de surfaces, conservent partout des valeurs finies; elle répond donc

seule à la question dans le premier des trois cas qui viennent d'être spécifiés.

137. Dans le second cas, il s'agit de projections autha-  
liques. Imaginons que les dimensions du globe se trou-  
vent réduites de manière que les aires mesurées sur la  
carte soient, non plus seulement proportionnelles, mais  
égales à celles des régions correspondantes, et prenons  
alors le rayon terrestre pour unité; l'aire totale de la  
carte sera mesurée par  $2\pi$ , et son périmètre, d'après la  
propriété que possède le cercle de contenir la plus grande  
surface avec un contour de longueur donnée, sera au  
moins égal à la circonférence du cercle dont l'aire est  
 $2\pi$ , c'est-à-dire à  $2\pi\sqrt{2}$ . D'après nos conditions, la to-  
talité de la courbe qui forme ce périmètre remplace sur  
la carte une circonférence de grand cercle ayant pour  
longueur  $2\pi$ ; les rapports de longueurs suivant les direc-  
tions des éléments de cette courbe sont donc tous égaux  
à  $\sqrt{2}$ , ou bien les uns sont plus petits et, par compensa-  
tion, les autres plus grands que  $\sqrt{2}$ ; dans tous les cas, il  
y a des points pour lesquels le demi-grand axe de l'ellipse  
indicatrice est au moins égal à  $\sqrt{2}$ , ce qui exige que le  
demi-petit axe soit au plus égal à  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , et que le rapport  
du premier au second soit au moins égal à 2; pour  
 $a = \sqrt{2}$  et  $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , la formule

$$\sin \omega = \frac{a - b}{a + b}$$

donnerait d'ailleurs

$$\sin \omega = \frac{1}{3}, \quad \omega = 19^{\circ}28'16'', \quad 2\omega = 38^{\circ}56'33'';$$

ainsi le *maximum* de ( $a$ ), c'est-à-dire le rapport de la  
longueur la plus amplifiée à la longueur la plus réduite

ne peut être inférieur à 2, et la plus grande altération d'angle ne peut être inférieure à  $38^{\circ}56'33''$ . Ces deux valeurs sont précisément les plus grandes que fournisse la projection centrale de Lambert, tandis que les autres projections authaliques non exclues jusqu'ici en fournissent de plus grandes encore. Actuellement, la projection centrale de Lambert est donc la seule qui réponde à la question, et même, quelles que soient les projections authaliques que l'on vienne plus tard à imaginer pour la représentation d'un hémisphère, aucune n'abaissera plus que celle-là les limites supérieures des altérations, tant que l'on s'astreindra à figurer par la totalité d'une courbe fermée la circonférence de grand cercle qui limite l'hémisphère.

138. Cette dernière condition subsiste encore dans le troisième cas que nous avons à considérer, mais il n'est plus nécessaire que le mode de projection soit ni auto-gonal ni authalique.

Quel que soit ce mode de projection, il est impossible que le rapport de la longueur la plus amplifiée ou la moins réduite à la longueur la plus réduite ou la moins amplifiée soit plus petit que  $\frac{\pi}{2}$ .

En effet, supposons que l'on ait diminué les dimensions du globe terrestre jusqu'à ce que son rayon soit devenu égal à la plus courte distance de la projection du pôle de l'hémisphère au contour de la carte, et prenons cette distance comme unité. La portion de droite sur laquelle on la mesure est la projection d'une portion de courbe au moins égale en longueur au quart d'une circonférence de grand cercle, c'est-à-dire à  $\frac{\pi}{2}$ ; le plus petit rapport de longueurs est donc au plus égal à  $\frac{2}{\pi}$ . D'un

autre côté, le contour de la carte enveloppe la circonférence qui a pour centre la projection du pôle de l'hémisphère et pour rayon l'unité, à moins qu'il ne se confonde avec elle; sa longueur est donc au moins égale à celle de la circonférence de grand cercle dont il est la projection; par conséquent, le plus grand rapport de longueurs est au moins égal à 1. De là il résulte que la plus grande valeur de  $(a)$  est au moins égale à  $\frac{\pi}{2}$ , ainsi que nous l'avions annoncé. La projection de Guillaume Postel donne précisément  $\frac{\pi}{2}$  pour la plus grande valeur de  $a$  dans la représentation d'un hémisphère, et partout  $b$  y est égal à 1, tandis que les autres projections nous ont donné pour la plus grande valeur de  $(a)$  des nombres plus grands que  $\frac{\pi}{2}$ . La projection de Guillaume Postel répond donc ici à la question, et même il serait impossible d'en imaginer une autre qui fournisse une valeur moindre pour la plus grande altération de longueur.

139. Il peut se faire que l'on désire obtenir une altération d'angle *maxima* plus petite que celle de la projection de Guillaume Postel en même temps qu'une altération de surface *maxima* plus petite que celle de la projection stéréographique, ou bien encore une altération de surface *maxima* plus petite que celle de la projection de Guillaume Postel en même temps qu'une altération d'angle *maxima* plus petite que celle de la projection centrale de Lambert. Les projections qui remplissent l'une ou l'autre de ces deux conditions sont la projection de M. Airy, celle de Nicolosi et toutes les perspectives pour lesquelles le point de vue se trouve en dehors de la sphère à une distance de la surface moindre que le rayon. En consultant les Tableaux qui leur sont

relatifs, on pourra trouver, dans la manière dont la déformation se répartit entre les diverses régions de l'hémisphère, des motifs d'adopter une de ces projections plutôt que les autres; mais, si l'on continue à considérer surtout les valeurs extrêmes des altérations, on devra rejeter la projection de Nicolosi ainsi qu'une partie des perspectives comme donnant à la fois, pour les trois sortes d'altérations, des *maxima* plus élevés que d'autres projections. Celles qui resteront sont la projection de M. Airy, les perspectives pour lesquelles la distance  $D$  du point de vue au centre est plus petite que 1,296, et celles pour lesquelles la même distance est comprise entre 1,360 et  $\frac{\pi}{2}$  ou entre 1,645 et 2. Ces conclusions se trouvent justifiées par le Tableau suivant et par cette considération que, dans les perspectives pour lesquelles  $D$  est compris entre 1 et 2,148, la plus grande valeur de l'altération d'angle augmente, et la plus grande valeur de l'altération de surface diminue, à mesure que  $D$  augmente.

NOMS DES PROJECTIONS.	VALEURS MAXIMA DE		
	$\alpha$ .	( $\alpha$ ).	S.
Projection stéréographique .....	0. 0'	2,000	4,000
Perspective ( $D = 1,296$ ) .....	14.48	1,772	2,242
Projection de M. Airy .....	14.48	1,693	2,213
Perspective ( $D = 1,361$ ) .....	17.36	1,735	2,211
Perspective ( $D = \frac{\pi}{2}$ ) .....	25.39	1,637	1,706
Projection de G. Postel .....	25.39	1,571	1,571
Perspective ( $D = 1,646$ ) .....	28.16	1,646	1,570
Projection de Nicolosi .....	32.47	1,787	1,571
Perspective ( $D = 2$ ) .....	38.57	2,000	1,125
Projection centrale de Lambert .....	38.57	2,000	1,000



140. Ainsi qu'on devait le prévoir par des raisons de symétrie, les projections remplissant les conditions que nous nous étions imposées relativement à la déformation sont des projections centrales; elles remplacent les méridiens par des droites et les parallèles par des circonférences, lorsque le pôle de l'hémisphère à représenter se confond avec le pôle géographique; dans le cas contraire, les deux mêmes séries de lignes se trouvent figurées par des circonférences sur la projection stéréographique, et sur les autres, par des ellipses, des courbes du quatrième degré ou des courbes transcendentes. Nous avons indiqué autrefois <sup>(1)</sup> un procédé pour le tracé par points des méridiens et des parallèles d'une projection centrale, le canevas de la projection stéréographique servant de canevas auxiliaire; il serait plus commode et plus exact de faire usage de Tables donnant les coordonnées rectangulaires de chaque point de la carte d'après la longitude et la latitude du point correspondant du globe; le calcul de ces Tables ne présente aucune difficulté, mais il est encore à faire, du moins en grande partie.

En chaque point d'une projection centrale, on peut obtenir immédiatement les directions des axes de l'ellipse indicatrice, puisque l'un d'eux se trouve sur la droite qui joint le centre de la carte au point considéré; quant à leurs longueurs, elles ne dépendent que de la longueur de cette droite et sont fournies par nos Tableaux. Il est donc facile, en partant des indications de la carte et en appliquant les propriétés du Chapitre I, de rétablir, soit graphiquement, soit par le calcul, les directions telles qu'elles émanent du point correspondant du globe, ainsi que les longueurs des arcs très-petits qui ont ce point pour origine. On pourra aussi tracer et déterminer en

---

(1) *Cosmos*, année 1865.

vraie grandeur le plus court chemin d'un point à un autre, pourvu qu'à la carte dont on fait usage on en joigne une autre construite d'après la projection gnomonique. Sur cette dernière, on tirera, entre les deux points, une ligne droite, que l'on décomposera en éléments assez petits; puis l'on mesurera chaque élément sur l'une ou l'autre projection en tenant compte des altérations éprouvées. La projection gnomonique exige quatre cartes pour la reproduction de la totalité de la surface terrestre.

141. Comme il y a peu d'intérêt à représenter les régions polaires exactement, il est permis de faire abstraction des points qu'elles renferment jusqu'à 15 degrés du pôle par exemple; au lieu d'un hémisphère limité par un méridien, on aura à considérer une portion du globe comprise entre ce méridien et deux moitiés des parallèles de 75 degrés de latitude. Au premier abord, il semble qu'en reprenant, dans ces conditions, la comparaison qui vient d'être effectuée, on sera conduit à choisir des modes de projection plus avantageux; un examen attentif de nos Tableaux montre qu'il n'en est rien. En effet, la projection stéréographique méridienne modifiée donne seule alors une altération d'angle *maxima* moindre que celle de la projection centrale de Lambert, en même temps qu'un rapport *maximum* de surfaces moindre que celui de la projection stéréographique; mais ces deux *maxima* et celui de (*a*), qui ont respectivement pour valeurs 16° 19', 2,524 et 2,023, sont tous trois plus élevés que ceux de la projection de M. Airy.

142. Nous avons exclu tout d'abord les projections coniques parce que, sur ces projections, les deux rayons qui limitent le secteur de la carte proviennent en réalité du dédoublement d'un même quart de circonférence de

grand cercle, comme si l'on avait ouvert l'hémisphère suivant ce quart de circonférence; mais l'inconvénient occasionné par la séparation ainsi produite se trouvera bien amoindri si elle se trouve effectuée suivant un quadrant ne rencontrant aucune terre, ou du moins ne rencontrant que celles des zones glaciales. Cette condition est remplie par les deux quarts de méridien qui aboutissent au pôle antarctique en partant des deux points diamétralement opposés de l'équateur dont les longitudes comptées à partir du méridien de Paris, l'une à l'est, l'autre à l'ouest, sont respectivement de 70 et de 110 degrés; ces points sont d'ailleurs ceux que l'on place au centre sur les mappemondes ordinaires. L'un des deux quarts de méridien dont nous venons de parler se dirige dans l'océan Indien, et l'autre dans l'océan Pacifique; on effectuera la séparation suivant le premier pour l'hémisphère qui renferme l'ancien continent, l'Australie et les îles de la Sonde; on la fera suivant le second pour l'hémisphère occupé par le reste de l'Océanie et les deux Amériques. On pourra alors adopter un mode de projection beaucoup plus avantageux que les précédents, savoir la projection conique authalique répondant à  $n = \frac{1}{\sqrt{2}}$  (Tableau XII), laquelle est périgonale, et par conséquent périmécoïque, pour un hémisphère. La plus grande valeur de  $a$  ne sera plus que  $\sqrt{2}$  ou 1,189; la plus petite valeur de  $b$  deviendra  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  ou 0,841; le rapport de la longueur la plus amplifiée à la longueur la plus réduite sera donc  $\sqrt{2}$  ou 1,414; enfin la plus grande valeur de  $\sin \omega$  se réduira à  $\tan^2 \frac{\pi}{8}$ , ce qui correspond à  $\omega = 9^\circ 53'$ ,  $2\omega = 19^\circ 45'$ .

Dans ce mode de projection, la carte de chaque hé-

misphère n'occupe plus un cercle entier, mais seulement un secteur de 255 degrés environ; les deux quarts d'équateur n'y sont pas dans le prolongement l'un de l'autre et font entre eux un angle d'un peu plus de 127 degrés; mais à cela il y a peu d'inconvénient, puisque le centre de la carte, où s'effectue la brisure, et pour lequel la loi de la déformation est ici en défaut, correspond à un point assez éloigné des continents.

Pour étudier la disposition mutuelle des quelques petites îles qui ont été disjointes, il suffirait de faire tourner, autour du centre, une portion de la carte, sans modifier en rien sa forme, jusqu'à ce que la réunion se trouve effectuée. Afin que l'on n'ait pas à faire cette rotation, le constructeur de la carte pourra utiliser le secteur de 105 degrés qui est resté vide en y représentant de nouveau, mais cette fois réunies, les parties qui ont été séparées, ou bien encore en prolongeant, de chaque côté, la carte déjà construite pour y ajouter celle d'un demi-fuseau de 60 à 70 degrés, lequel figurerait ainsi deux fois sur la carte totale.

La projection dont nous nous occupons ne produit aucune déformation à 65°,5 de distance du point central; de sorte qu'il y a, dans l'hémisphère oriental, un cercle traversant l'Afrique, l'Europe, l'Asie et l'Australie, tout le long duquel les altérations sont nulles; le cercle de l'hémisphère occidental, qui possède la même propriété, traverse les deux Amériques. Ainsi, non-seulement les altérations ne sont jamais considérables, mais le nombre des points importants où elles atteignent leurs plus grandes valeurs est très-restreint. On peut d'ailleurs les déterminer, comme dans les projections centrales, à l'aide de constructions géométriques et en corriger les angles ainsi que les longueurs. Elles sont les mêmes à des distances égales du centre. En joignant

au centre un point quelconque de la carte, par une ligne droite, on obtient l'une des deux directions qui, partant de ce point, se coupent à angle droit sur la carte comme sur le globe; les déviations comptées à partir de l'une ou l'autre n'atteignent jamais 10 degrés. C'est aussi sur ces deux directions que se mesurent la longueur la plus amplifiée et la longueur la plus réduite, lesquelles, dans les cas les plus défavorables, ne diffèrent de la longueur vraie que de sa cinquième partie, ainsi que cela résulte des nombres que nous avons donnés tout à l'heure.

Au lieu d'adopter, pour  $n$ , la valeur  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  ou 0,707, on peut prendre, en nombre rond,  $n = 0,75 = \frac{3}{4}$ , ce qui rend la construction plus commode. On augmentera ainsi un peu les altérations sur les bords de la carte, mais on les diminuera vers le centre, c'est-à-dire dans la région où, d'après le Tableau XII, elles varient le plus lentement. Le petit cercle lieu des points d'altérations nulles n'aura plus que 60 degrés de rayon sphérique et divisera les continents en parties plus égales. L'angle du secteur resté vide sera réduit à 90 degrés, et les deux moitiés de l'équateur de la carte feront entre elles un angle un peu plus obtus. On aura d'ailleurs, pour les plus grandes valeurs de  $a$ ,  $(a)$  et  $\omega$  : au centre de la carte,

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,155, \quad (a) = \frac{4}{3} = 1,333,$$

$$\sin \omega = \frac{1}{7}, \quad \omega = 8^{\circ} 13', \quad 2\omega = 16^{\circ} 26';$$

sur les bords,

$$a = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1,225, \quad (a) = \frac{3}{2} = 1,500,$$

$$\sin \omega = \frac{1}{5}, \quad \omega = 11^{\circ} 32', \quad 2\omega = 23^{\circ} 4'.$$

143. La projection conique autogonale qui correspond à  $n = \frac{2}{3}$  et la projection tronconique authalique qui correspond à  $n = 0,609$ ,  $\rho = 0,3404$  seraient celles qu'il conviendrait d'adopter si l'on voulait représenter un hémisphère limité par l'équateur, en ne tenant pas compte des déformations produites au delà du parallèle de 75 degrés de latitude. La première donnerait 1,275 pour le plus grand rapport de longueurs, et 1,624 pour le plus grand rapport de surfaces; la seconde donnerait 13° 14' pour la plus grande altération d'angle et 1,123 pour le maximum de ( $a$ ). Les limites des altérations se trouveraient ainsi moindres que dans la représentation d'un hémisphère sur un méridien. Mais cette combinaison présenterait le grave inconvénient de séparer sur les mappemondes les deux parties de l'Afrique, ainsi que les deux parties de l'Amérique, situées au nord et au sud de l'équateur.

144. Au lieu d'un hémisphère entier, considérons maintenant une zone à une base limitée par un petit cercle. Il est clair que les projections les plus avantageuses se trouveront parmi les projections centrales. La projection stéréographique sera encore celle des projections autogonales qui réduira le plus possible les plus grandes altérations de longueur et de surface; la projection centrale de Lambert sera celle des projections authaliques qui réduira le plus possible les plus grandes altérations d'angle et de longueur, à moins que l'on ne se décide à ouvrir la zone et à la représenter par la projection conique authalique qui est périgonale pour cette zone; enfin la projection de Guillaume Postel réduira à son minimum la plus grande altération de longueur. A ces projections on pourra joindre celle de M. Airy ainsi

que des perspectives, qui ne seront pas les mêmes que celles auxquelles nous avons été conduits lorsqu'il s'agissait d'un hémisphère entier, mais pour lesquelles les limites des distances du point de vue au centre de la sphère se détermineront d'une manière analogue. Nous avons pris comme exemples les trois zones à une base dont les rayons sphériques sont de 25, 40 et 50 degrés ; on verra tout à l'heure pourquoi ce sont celles-là que nous avons choisies. Dans le tableau qui leur est relatif, figurent les projections qui viennent d'être citées, sauf celle de M. Airy et les perspectives ; nous y avons fait aussi entrer les perspectives qui sont périmécoïques et celles qui sont périhaliques pour les trois zones ; on remarquera que, dans les premières, les altérations *maxima* diffèrent à peine de celles de la projection de Guillaume Postel, et, dans les trois autres, de celles de la projection centrale de Lambert.

L'Europe, moins une partie du Spitzberg et de la Nouvelle-Zemble, est comprise à l'intérieur d'une calotte sphérique ayant son pôle aux environs de Plock en Pologne, et dont le rayon est de 25 degrés ; les nombres des trois premières colonnes lui sont donc applicables. La même partie du monde est aussi comprise dans la zone limitée par les parallèles de 35 degrés et de 75 degrés de latitude, ce qui permet d'en construire la carte à l'aide de la projection conique autogonale qui est périhalique pour cette zone, ou encore à l'aide de la projection tronconique authalique qui est périgonale pour ladite zone ; mais ces deux projections conduisent à des altérations *maxima* respectivement plus fortes que celles de la projection stéréographique et que celles de la projection conique authalique qui figure dans le Tableau.

NOMS DES PROJECTIONS.	PREMIÈRE ZONE. Rayon de 25 degrés.		DEUXIÈME ZONE. Rayon de 40 degrés.		TROISIÈME ZONE. Rayon de 50 degrés.	
	$r^m$	( $a$ )	$r^m$	( $a$ )	$r^m$	( $a$ )
	S	S	S	S	S	S
Projection stéréographique.....	0' 0	1,019	0' 0	1,132	0' 0	1,217
Projections coniques aithaliques périgonales.....	1.21	1,021	3.31	1,061	5.38	1,103
Projection de Guillaume Postel.	1.50	1,032	4.44	1,086	7.27	1,139
Perspectives périmécoïques....	1.50	1,033	4.17	1,087	7.36	1,142
Projection centrale de Lambert..	2.45	1,049	7. 7	1,132	11.15	1,217
Perspectives périaliques .....	2.46	1,050	7.11	1,135	11.31	1,224

Le rayon sphérique de la calotte la moins étendue qui contient l'Asie est de 50 degrés; les nombres des trois dernières colonnes font donc connaître les plus grandes



altérations produites sur la carte de cette partie du monde par les six projections.

Pour l'Afrique et pour l'Amérique septentrionale, c'est aux quatrième, cinquième et sixième colonnes qu'il faut se reporter, car les deux calottes sphériques correspondantes ont l'une et l'autre 40 degrés de rayon.

Pour l'Amérique du Sud, le rayon de la calotte est de 33 degrés, ce qui conduit à des altérations intermédiaires entre celles des trois premières colonnes et celles des trois suivantes; avec la projection stéréographique, par exemple, le plus grand rapport de longueurs est 1,088, et le plus grand rapport de surfaces 1,183.

Appliquées à la carte d'Afrique et à celle de l'Amérique du Sud, les projections coniques aithaliques périmétriques ne présenteraient pas, comme sur celles d'Europe et d'Asie, l'inconvénient de disjoindre des points qui se touchent sur la surface terrestre, et produiraient des altérations moindres que celles de la projection centrale de Lambert. Pour l'Afrique, on placerait près de la côte du Gabon le pôle de la calotte sphérique, dont on porterait le rayon à 42 ou 43 degrés, et l'on effectuerait la séparation suivant l'arc d'équateur qui se dirige dans l'océan Atlantique. Pour l'Amérique méridionale, on donnerait 37 degrés de rayon à la calotte sphérique, et l'on séparerait suivant un arc de grand cercle dirigé dans l'océan Pacifique. On pourrait même diminuer encore les altérations, mais cette fois de quantités assez faibles, en substituant les projections tronconiques aux projections coniques.

La projection de Bonne serait beaucoup moins avantageuse que celles du Tableau précédent pour les cartes des mêmes régions. On peut s'en convaincre par un coup d'œil jeté sur les nombres ci-dessous, que nous avons

cependant déterminés en adoptant les méridiens et les parallèles moyens les plus favorables.

*Projection de Bonne.*

RÉGIONS.	MAXIMA DE		
	20.	(a).	S.
Europe.....	6,23 <sup>0</sup>	1,118	1,000
Asie.....	26,10	1,585	1,000
Afrique.....	12,28	1,244	1,000
Amérique du Nord.....	22,34	1,487	1,000
Amérique du Sud.....	8,16	1,155	1,000

145. Les projections que nous avons considérées dans le numéro précédent ne sont pas celles qui abaissent le plus possible les limites des altérations sur les cartes d'Europe, d'Asie, d'Afrique, etc., parce que ces régions sont loin d'occuper entièrement les plus petites zones à une base qui les contiennent. Si l'on veut trouver, pour chacune de ces cartes ou pour celle d'un pays quelconque, les systèmes qui remplissent les conditions énoncées, il faudra avoir recours au procédé que nous allons expliquer maintenant.

Il n'est pas de mode de projection pour lequel on ne puisse dessiner sur le globe le contour d'une région à la représentation de laquelle il s'adapterait mieux que tous les autres; aucun de ceux qui ont été proposés jusqu'à présent ne doit donc être exclu *a priori*; seulement beaucoup pourront l'être à la suite d'un examen rapide dans lequel on aura eu égard, en consultant nos Tableaux, à la forme et à l'étendue de la contrée dont il s'agit de construire la carte. Dans cet examen préalable

et dans la comparaison que l'on devra effectuer ensuite entre les systèmes non rejetés, on ne devra pas perdre de vue la remarque suivante.

Chaque système de projection est susceptible d'en engendrer une infinité d'autres, ainsi qu'il est facile de s'en rendre compte par un exemple. Considérons la projection de Lagrange, qui conserve les angles, et qui jouit de la propriété qu'à partir d'un certain point de l'équateur les altérations y varient moins rapidement, sur cette ligne et sur le méridien, que dans les autres projections autogonales à méridiens circulaires. Il est facile d'imaginer un autre système remplissant des conditions analogues et possédant la même propriété par rapport à un autre point de la sphère et à deux grands cercles quelconques se coupant à angle droit; le pôle de l'un de ces deux grands cercles remplacera ici le pôle géographique, et les formules qui donnaient, dans le premier cas, les coordonnées des divers points de la carte s'appliqueront aussi au second, pourvu qu'on y remplace la longitude et la latitude par deux nouvelles variables qui en seront des fonctions connues. En déplaçant les deux grands cercles, on obtiendra une infinité de modes de projection fournissant des valeurs différentes, pour les limites des altérations, dans la représentation d'une seule et même contrée. Comme autre exemple, on peut citer la projection stéréographique, qui, suivant qu'on l'effectue sur l'horizon d'un lieu ou sur celui d'un autre lieu, donne à la carte d'un même pays des aspects différents.

Nous avons déjà parlé de cartes sur lesquelles seraient tracées, pour les divers systèmes de projection, des courbes suffisamment rapprochées d'égaux altérations ou de *maxima* égaux d'altérations. Pour les projections autogonales, chaque courbe serait le lieu des points où

le rapport de surfaces prend une valeur donnée; pour les projections authaliques, ce serait le lieu des points où la plus grande altération d'angle atteint une limite donnée; pour chaque projection aphyllactique, il serait utile qu'il y eût quatre séries de courbes, dont deux se rapporteraient aux éléments qui viennent d'être mentionnés, et les deux autres aux axes de l'ellipse indicatrice. Les cartes pourraient être construites d'après la projection centrale de Lambert; quant aux courbes, on les tracerait, en partant de leurs équations, qu'il est facile de former, ou mieux en renversant la question et calculant, pour beaucoup plus de points que nous n'avons pu le faire, les éléments de la déformation.

L'emploi de ces cartes conduirait, dans chaque cas particulier, à la solution du problème qui nous occupe, et l'on comprend qu'il suffit d'en avoir une seule pour tous les systèmes de projection qui se déduisent les uns des autres par le mode de génération qui a été expliqué tout à l'heure. Imaginons en effet une carte auxiliaire de la contrée tracée aussi d'après la projection centrale de Lambert, et plaçons-la, par exemple, sur la feuille où sont dessinées les courbes d'égaux altérations de la projection de Lagrange; en la faisant glisser et tourner sur cette feuille, on arrivera à lui donner une position dans laquelle le *maximum* d'altération indiqué sera moindre que dans toute autre. On relèvera alors, sur la carte mobile, la longitude et la latitude du point d'intersection des deux droites de la carte fixe qui représentent l'équateur et le méridien moyen de cette dernière; on mesurera aussi l'azimut de l'une de ces droites par rapport au méridien de la carte mobile, et on le corrigera de la déviation occasionnée par la projection de Lambert. On obtiendra ainsi les éléments propres à caractériser celui des systèmes dérivés de la projection de Lagrange

qui atténue le plus le *maximum* d'altération dans la représentation de la contrée donnée. On opérera de même pour les autres projections autogonales, et l'on arrivera ainsi à connaître celle qui correspond à la plus petite valeur du *maximum* de l'altération de surface, et par conséquent aussi du *maximum* de l'altération de longueur.

Un procédé analogue appliqué aux projections authaliques donnera celle qui correspond aux plus petites valeurs des *maxima* des altérations d'angles et de longueurs. On l'appliquera aussi aux projections aphyllactiques, afin de reconnaître celles qui produisent en même temps un *maximum* d'altération d'angle et un *maximum* d'altération de surface respectivement moindre que les plus faibles qui aient été obtenus par les projections authaliques et par les projections autogonales. On déterminera en particulier la projection aphyllactique qui réduit le plus possible la plus grande altération de longueur; ici, les recherches s'effectueront à l'aide des courbes relatives aux axes des ellipses indicatrices, et il pourra y avoir quelque tâtonnement provenant de ce que l'élément à considérer est le rapport de la plus forte valeur du grand axe, pour toute l'étendue de la carte, à la plus faible valeur du petit axe, lorsque la moitié de cette dernière est différente de l'unité.



---

# COMPLÉMENT.

---

## PRÉLIMINAIRES.

### OBJET DU COMPLÉMENT.

1. Le présent Mémoire avait principalement en vue deux questions : l'étude de la déformation produite par les divers modes de projection des cartes géographiques, et la recherche du système le mieux approprié à la représentation de chaque contrée particulière. Cette dernière question a fait le sujet du Chapitre II. Quant à la première, pour la traiter complètement, il eût fallu joindre au premier Chapitre, dans lequel se trouve établie la loi de la déformation, et aux Chapitres III et IV, où sont expliqués et discutés les résultats reportés à la fin du Mémoire sous forme de Tableaux numériques, un Chapitre intermédiaire contenant les formules qui, déduites de la loi de la déformation, conduisent à ces résultats. C'est ce Chapitre que nous présentons ici sous le titre de *Complément*.

Le nombre des modes de projection proposés jusqu'à présent étant assez considérable, nous commencerons par un essai de classification et de nomenclature qui évite la confusion et permette de désigner brièvement chacun d'eux, tout en indiquant ses principales propriétés. Nous donnerons ensuite, sur leur invention et les applications qu'ils ont fournies, des notions historiques fort succinctes, renvoyant, pour plus de détails, à l'intéressante

Notice publiée en 1863, par d'Avezac, dans le *Bulletin de la Société de Géographie*.

Nous aurons souvent à nous appuyer sur plusieurs des formules qui ont été démontrées dans le Chapitre I; pour les mettre mieux en évidence, nous les reproduirons ici. Les numéros, soit de formules, soit de paragraphes, auxquels on aura à se reporter seront tous des numéros du *Complément*.

Quand on classe les projections entre elles d'après la nature des lignes du canevas, les mêmes formules s'appliquent à toute une classe, se particularisant seulement lorsque, dans une même classe, on passe d'un groupe à un autre. Pour chaque classe, nous chercherons d'abord quelles sont les projections qui conservent les angles, puis celles qui conservent les surfaces, et, dans chaque groupe, quelle est la projection qui réduit à son *minimum* telle altération que l'on ne peut annuler. Enfin, pour chaque projection, nous nous bornerons à établir les formules relatives aux éléments de la déformation, les autres questions ayant été suffisamment approfondies dans le savant *Traité des projections des cartes géographiques* de M. A. Germain, publié en 1865.

#### CLASSIFICATION ET NOMENCLATURE.

2. Suivant le point de vue auquel on se place, on peut classer entre elles les projections des cartes géographiques de différentes manières.

Certaines de ces projections comportent des définitions géométriques très simples : telles sont les perspectives. D'autres, en petit nombre, ne diffèrent des précédentes que par des modifications légères et faciles à énoncer. La plupart restent en dehors de ces deux catégories. De là une première répartition en *projections*

*géométriques, projections géométriques modifiées et systèmes conventionnels.*

La nature des deux séries de courbes qui forment, sur la carte, le canevas des méridiens et des parallèles donne lieu à un mode de répartition moins inégal que le précédent. Il permet de distinguer les divers systèmes en *projections cylindriques, projections méricylindriques, projections coniques, projections mériconiques, projections polyconiques, projections sphériques et projections mérisphériques*. Le sens de ces dénominations sera expliqué bientôt.

Suivant que les méridiens et les parallèles de la carte se coupent ou non à angle droit, la projection est dite *rectangulaire* ou *obliquangle*.

Quand on néglige l'aplatissement ou que, pour en tenir compte, on a recours à la sphère de Prony, on peut, de tout système donné de projection, en déduire une infinité d'autres, en considérant, au lieu du pôle géographique, un point arbitraire du globe pris comme *pivot de la projection*, puis opérant sur les petits cercles qui ont ce point pour pôle, et sur les grands cercles qui le contiennent, comme on opérerait sur les parallèles et sur les méridiens dans le système donné. Ce dernier étant regardé comme une *projection directe*, nous appellerons *projections transverses* celles qu'il engendre quand le pivot est un point de l'équateur. Toute autre position du pivot donnera lieu à une *projection oblique*. Les noms de *projection équatoriale* ou *projection polaire*, de *projection méridienne*, de *projection sur l'horizon* de tel ou tel lieu se rapportent aussi à des projections se déduisant les unes des autres d'une manière analogue. Dans une projection méridienne donnant la carte d'un hémisphère, nous appellerons *méridien principal* celui qui limite cet



hémisphère et *méridien moyen* celui qui divise l'hémisphère en deux parties égales. Le plus souvent, la projection du premier sera une circonférence, et celle du second un diamètre de cette circonférence. Le méridien moyen sera aussi le *premier méridien*, parce que nous le prendrons pour origine des longitudes; la longitude du méridien principal sera ainsi égale à  $90^{\circ}$ .

Nous qualifierons d'*autogonales* les projections qui conservent les angles, d'*authaliques* celles qui conservent les aires, d'*aphylactiques* celles qui ne possèdent ni l'une ni l'autre de ces deux propriétés. Quant à l'expression d'*automécoïque*, il n'y a lieu de l'appliquer à aucun mode de projection dans la représentation plane de la surface terrestre, puisque les distances sont nécessairement altérées; nous la réserverons aux lignes dont toutes les parties conservent leurs longueurs sur la carte. Enfin, dans certains groupes de projections dont aucune n'est authalique, on peut en trouver qui satisfassent à la double condition de conserver les aires des fuseaux limités par les méridiens et celles des zones limitées par les parallèles : nous les nommerons *atractozoniques*. Pour qu'un système atractozonique soit en même temps authalique, il faut que la projection d'un parallèle quelconque divise non seulement l'aire totale de la carte, mais aussi celle de la projection de tout fuseau, en parties proportionnelles aux aires des régions correspondantes du globe.

3. Les projections géométriques comprennent : les *développements cylindriques*, les *développements coniques*, les *perspectives*, les *développements de perspectives épicylindriques* et les *développements de perspectives épiconiques*.

Pour obtenir un *développement cylindrique* ou co-

*nique*, la projection étant directe, on imagine un cylindre ou un cône de révolution dont l'axe coïncide avec la ligne des pôles terrestres; les plans des méridiens et ceux des parallèles coupent le cylindre ou le cône suivant des droites et des circonférences. On développe la surface cylindrique ou conique; les transformées de ces droites, qui sont des droites parallèles ou concourantes, et les transformées des circonférences, qui sont d'autres droites perpendiculaires aux premières ou des circonférences concentriques, sont adoptées comme méridiens et parallèles de la carte.

Les *projections perspectives* en usage dans la construction des cartes géographiques sont assujetties à cette condition que le point de vue se trouve, avec le centre du globe, sur une perpendiculaire au plan du tableau. Trois d'entre elles ont reçu depuis longtemps des noms particuliers : ce sont la *projection gnomonique*, la *projection stéréographique* et la *projection orthographique*. Dans la première, le point de vue est au centre du globe; dans la deuxième, il est sur la surface; dans la troisième, il est rejeté à l'infini, de sorte que cette dernière s'obtient en abaissant, des divers points de la surface terrestre, des perpendiculaires sur le plan de la carte.

Dans un *développement de perspective épicylindrique* ou *épiconique*, on prend les perspectives des différents lieux sur un cylindre ou un cône de révolution ayant pour axe la ligne des pôles; puis on développe la surface. Tantôt le point de vue est fixe et situé sur l'axe; tantôt il est mobile dans le plan de l'équateur et décrit une circonférence concentrique à cette ligne, de manière à se trouver constamment dans le plan du méridien du point à représenter, la ligne des pôles passant entre les deux points. Quand le point de vue est choisi au centre

du globe, on a un développement de perspective *gnomonique* épicylindrique ou épiconique.

4. Occupons-nous maintenant de la classification qui repose sur la nature des lignes du canevas.

On donne le nom de *projections cylindriques* à toutes celles dans lesquelles les méridiens sont représentés par des droites ayant une direction commune, et les parallèles par d'autres droites perpendiculaires aux premières. Elles comprennent comme cas particulier les développements cylindriques.

Les *projections méricylindriques* se distinguent les unes des autres, et aussi des précédentes, par le tracé des méridiens de la carte, qui peuvent être des lignes quelconques; dans les *projections trapéziiformes*, ce sont des droites concourantes.

Sur une *projection conique*, les méridiens sont représentés par des droites partant d'un même point, les parallèles par des arcs de circonférence ayant ce point pour centre. La projection du parallèle infiniment petit situé au pôle peut être ou un point unique ou l'un de ces arcs; dans le second cas, si l'on veut le distinguer du premier, on dira que la projection est *tronconique*.

En passant en revue les systèmes de projection qui ont été proposés jusqu'à présent, on peut constater que les projections cylindriques et méricylindriques comprennent toutes les projections à parallèles rectilignes, et que, à l'exception des projections trapéziiformes, toutes les projections à méridiens rectilignes appartiennent ou aux projections cylindriques ou aux projections coniques. En effet, dans les projections où les parallèles se trouvent représentés par des droites, ces droites sont parallèles entre elles; dans toutes celles où les méridiens se trouvent représentés par des droites, ces droites

sont ou parallèles entre elles ou concourantes, et les parallèles ont pour projections ou des droites ou des circonférences concentriques. Enfin, on constatera également que les distances mutuelles des méridiens de la carte dans les projections cylindriques et leurs inclinaisons mutuelles dans les projections coniques sont proportionnelles aux angles des méridiens correspondants du globe.

Au lieu d'une projection conique, on a une *projection centrale* quand les méridiens font entre eux les mêmes angles sur la carte et sur le globe; chaque parallèle est alors figuré par une circonférence entière.

Une *projection polyconique* est celle dans laquelle les parallèles ont pour projections des circonférences non concentriques.

Quand les deux séries de courbes formant le canevas sont des circonférences, on a une *projection sphérique*.

Si les méridiens seulement sont circulaires, on aura une *projection mérisphérique*.

A ces trois dernières définitions on peut ajouter la condition suivante, qui se trouve réalisée dans toutes les projections en usage : les circonférences de chaque série ont leurs centres en ligne droite.

Nous ne connaissons que trois projections continues qui, n'ayant ni leurs parallèles ni leurs méridiens rectilignes ou circulaires, ne rentrent dans aucune des catégories précédentes. Nous étudierons après les autres ces *projections non classées*, en même temps que les *projections discontinues* connues sous le nom de *projections étoilées*.

5. Les développements cylindriques nous offrent l'exemple d'un groupe de projections ne différant les unes des autres que par les diverses valeurs attribuées à

un paramètre; il en est de même des perspectives. Dans un groupe de cette nature, si aucune valeur du paramètre ne rend la projection autogonale, ce qui est le cas du premier des deux exemples choisis, si aucune ne la rend authalique, ce qui est le cas du second, on pourra du moins déterminer ce paramètre de manière à réduire à son *minimum*, soit la plus grande altération d'angle, soit la plus grande altération de surface, dans la représentation d'une région donnée. Alors, des deux projections ainsi obtenues, on dira que la première est *périgonale* et la seconde *périhalique* pour cette région. On pourra aussi choisir le paramètre de manière que la projection devienne *périmécoïque* pour la même région, c'est-à-dire qu'elle réduise à son *minimum* la plus grande altération de longueur. Lorsque les trois mots que nous venons de définir ne seront suivis d'aucune indication de contrée, cela signifiera qu'il s'agit de la représentation d'un hémisphère.

Dans un groupe de projections autogonales, celle qui est *périhalique* est en même temps *périmécoïque*, pour une portion donnée de la surface terrestre, et, dans un groupe de projections authaliques, c'est aussi une seule projection qui est à la fois *périgonale* et *périmécoïque*.

#### NOTIONS HISTORIQUES.

6. D'après une interprétation assez plausible qui a été donnée de certains textes anciens, les Égyptiens faisaient usage de cartes géographiques sous le règne de Sésostris, c'est-à-dire seize siècles avant notre ère. Mais la première dont il soit fait une mention positive a été construite par Anaximandre, qui vivait à Milet en l'an 545 avant Jésus-Christ et était disciple de Thalès, le fondateur de l'école ionienne; elle représentait le monde

alors connu. Quelques autres la suivirent, dont le souvenir a été aussi conservé, mais qui n'étaient sans doute que des éditions nouvelles de celle d'Anaximandre.

Environ trois cents ans avant Jésus-Christ, Dicéarque, disciple d'Aristote, dressa une autre carte en mettant à profit les découvertes géographiques, devenues fréquentes depuis le commencement du règne d'Alexandre. Les règles auxquelles il se conforma dans son tracé ne sont pas plus connues que celles qui avaient été adoptées par ses prédécesseurs; les probabilités seraient en faveur du système de projection cylindrique connu sous le nom de *projection des cartes plates*. En tout cas, c'est bien d'après ce système que fut construite, un demi-siècle plus tard, la carte d'Ératosthène, et ce fut aussi le seul employé par les géographes grecs ou romains jusqu'à Ptolémée (130 ans après J.-C.), qui le conserva pour les cartes de contrées particulières, mais conseilla d'employer à la représentation du monde connu de son temps (180° en longitude sur un maximum de 80° en latitude) deux autres modes de projection dont il sera question un peu plus loin.

Après l'invasion des Barbares et pendant la période du moyen âge, les sciences ne sont plus cultivées en Occident; mais elles renaissent vers l'an 800 chez les Arabes, qui traduisent les Ouvrages des Grecs, en particulier ceux de Ptolémée, et construisent un assez grand nombre de cartes géographiques; aucune toutefois ne mérite d'être signalée au point de vue de l'histoire des projections. Nous en dirons autant des cartes tracées par les marins de la Méditerranée jusqu'au commencement du xvi<sup>e</sup> siècle. Enfin, en 1566, Gérard Kaufmann, plus connu sous son nom latin de Mercator, vient rendre à la navigation un service des plus importants, en substituant pour les cartes marines, au sys-

tème des cartes plates carrées, la projection cylindrique autogonale que l'on appelle habituellement *projection des cartes réduites*. La projection des cartes plates n'a plus guère été employée depuis. Cependant, comme elle se prête assez bien à la représentation des contrées voisines de l'équateur et peu étendues en latitude, d'Anville s'en est servi en 1776 pour la construction d'une carte de la Guinée. C'est encore d'après une projection plate carrée transverse, que fut tracée la carte de France commencée par François Cassini en 1745 et terminée en 1793 par son fils, Dominique Cassini.

7. Des deux projections que Ptolémée recommandait pour les mappemondes, l'une est une projection conique à méridiens automécoïques, l'autre une projection métriconique dans laquelle le méridien moyen, d'ailleurs rectiligne, était en même temps automécoïque, ainsi que quatre parallèles, savoir : celui de Thulé, celui de Syène, l'équateur et l'antiparallèle de Méroë; le tracé des autres méridiens, se trouvant ainsi déterminé par quatre points seulement, restait encore arbitraire. Les projections coniques à méridiens automécoïques ont été employées plusieurs fois depuis, notamment par Mercator, en 1554, pour la construction d'une grande carte d'Europe, et par de l'Isle, en 1745, pour la carte de Russie. Quant à la seconde projection de Ptolémée, après avoir été tirée de l'oubli et appliquée en 1511 par Bernard de Sylva, elle se transforma, de 1520 à 1566, entre les mains de divers géographes, à commencer par Pierre Benuwitz, dit Apianus, pour finir à Guillaume Le Testu; on acheva de déterminer son tracé en rendant tous les parallèles automécoïques. En 1572, Bonne fit ressortir les propriétés de cette projection et s'en servit, ainsi qu'un peu plus tard de l'Isle, d'Anville et d'autres géographes,

dans la construction de grandes cartes comme celle d'une partie du monde. En 1821, une Commission présidée par Laplace l'adopta pour la Carte de France en deux cent soixante-neuf feuilles, dont les travaux, décrétés dès l'année 1808 et commencés seulement en 1818, furent terminés quarante-cinq ans plus tard par le corps de l'État-major, dans lequel s'était fondu en 1831 celui des ingénieurs géographes. D'autres projections coniques ou mériconiques ont été souvent appliquées depuis le commencement du xvi<sup>e</sup> siècle.

8. De toutes les projections, les plus anciennement connues sont : la projection gnomonique, qui paraît antérieure à Thalès; la projection orthographique, attribuée par les uns à Apollonius (240 ans avant J.-C.), par d'autres à Hipparque (130 ans avant J.-C.); enfin la projection stéréographique, imaginée par Hipparque pour la représentation de la sphère céleste. Mais leur emploi en Géographie est relativement récent. Werner de Nuremberg, en 1514, consacra le premier à cet usage la projection stéréographique, qui n'a pas cessé d'être usitée depuis, surtout en Allemagne. De Prony, en 1791, eut la pensée d'établir les feuilles du cadastre dans le système de la projection gnomonique, mais ce dessein n'eut pas de suite. En 1803 seulement, Reichard fit paraître à Weimar un Atlas dans lequel le globe entier se trouve représenté au moyen de six cartes qui sont des perspectives gnomoniques prises sur les six faces d'un cube circonscrit. Enfin, la projection orthographique n'a guère été utilisée que dans deux Atlas publiés l'un en 1843 par Laguillermie, l'autre par Garnier en 1862.

9. La projection centrale à méridiens automécoïques

T.

10



a été proposée en 1581 par Guillaume Postel, qui s'en servit pour la construction d'une mappemonde équatoriale. Depuis, elle a été étudiée, comme projection méridienne et comme projection horizontale, par Lambert en 1772 et par Cagnoli en 1799. On en fait souvent usage sous l'aspect polaire pour les cartes célestes, et c'est à elle que le Bureau des Longitudes a recours pour la confection des cartes terrestres qu'il publie dans la *Connaissance des Temps*, afin d'indiquer la marche des éclipses de Soleil.

10. A partir de 1650, Nicolas Sanson et ses fils construisirent des cartes des diverses parties du monde, plusieurs fois rééditées, ainsi que des cartes de détail, dans le système de la projection méricylindrique à méridien moyen et parallèles automécoïques. C'est aussi celle que Flamsteed adopta pour la confection de son Atlas céleste, commencé en 1700 et terminé en 1729. La carte d'Afrique est encore tracée souvent d'après cette projection. Il est bon de remarquer qu'elle est postérieure à la projection conique à méridien moyen et parallèles automécoïques qui a servi au tracé de la carte de France de l'État-major, bien que l'on donne quelquefois à cette dernière le nom de *projection de Flamsteed modifiée*.

11. Nicolosi publiait à Rome, en 1660, une série de grandes cartes à méridiens et parallèles circulaires d'après un système dans lequel, l'équateur et le méridien moyen étant rectilignes et automécoïques, les parallèles divisent les méridiens extrêmes en parties proportionnelles aux différences de latitude. La projection de Nicolosi fut adoptée en France par Pierre du Val en 1676, par de l'Isle en 1714, et par d'autres géographes; en 1794, elle

fut adoptée en Angleterre par Arrowsmith, dont elle prit souvent le nom, ainsi que celui de *projection globulaire*. Elle continue à être employée dans la construction des mappemondes.

12. La Hire en 1701, Parent en 1704, Lowry en 1824, le colonel James, directeur de l'*Ordnance Survey*, en 1857, et un peu plus tard le capitaine Clarke, du même Service, ont proposé diverses projections qui sont des perspectives ne différant les unes des autres que par la distance du point de vue au centre de la sphère.

13. Bien que le nom de Gauss soit resté attaché aux projections coniques autogonales, celui de Lagrange aux projections sphériques autogonales, celui de Lorgna à la projection centrale authalique, c'est à Lambert, vers l'année 1772, que sont dues ces trois espèces de projection, ainsi que les projections coniques authaliques. Au point de vue théorique de la représentation autogonale d'une surface sur une autre, les Mémoires de Lagrange en 1781, de Gauss en 1822, de M. Ossian Bonnet en 1852, ont une portée plus étendue que celui de Lambert; mais, parmi les résultats auxquels ils conduisent, ceux qui sont réellement utiles à la construction des cartes géographiques se trouvaient déjà contenus dans ce dernier. Il y a lieu de regretter que, jusqu'à présent, on en ait si peu tiré parti.

Les projections coniques autogonales ont été adoptées pour plusieurs des planches de l'Atlas céleste de Harding, qui parurent de 1808 à 1822, et aussi pour la grande carte de Russie en douze feuilles publiée en 1862 par la Société de Géographie de Saint-Petersbourg. Les projections sphériques autogonales autres que la projection stéréographique n'ont fourni aucune

application. Il paraît en être de même des projections coniques authaliques et de la projection centrale authalique, bien que l'attention ait été appelée plusieurs fois sur cette dernière, notamment par Lorgna, dix-sept ans après son invention, et en 1865 par M. Collignon, qui en a fait le sujet d'une étude approfondie.

Après les projections coniques authaliques de Lambert, il convient de mentionner les projections tronconiques authaliques proposées par Albers en 1805, et qui ont servi, quelques années plus tard, au tracé de la carte générale de l'Europe publiée par Reichard à Nuremberg.

14. En passant en revue les systèmes de projection, nous ajouterons quelques renseignements à ceux qui précèdent. Citons encore, avant de terminer ce rapide examen :

La projection méricylindrique authalique à méridiens elliptiques imaginée par Mollweide en 1805, et qui a été utilisée en 1857 à la confection d'un Atlas, sous le nom de *projection homalographique de Babinet* ;

La projection polyconique rectangulaire dont on fait usage en Angleterre et en Amérique ;

La projection polyconique à parallèles automécoïques qui a été adoptée en 1855, par le *Coast Survey Office*, pour la représentation, sur deux cartes distinctes, de la côte orientale et de la côte occidentale des États-Unis ;

La projection centrale compensative proposée en 1861 par M. Airy ;

Enfin, les développements de perspectives épicylindriques imaginés par le P. Braun en 1868.

## FORMULES RELATIVES A LA DÉFORMATION.

15. Considérons une courbe tracée sur le globe, un point particulier de cette courbe avec la tangente en ce point, un second point de la même courbe, et enfin, sur la carte, la projection de l'arc ainsi obtenu. Le rapport de cette projection à l'arc lui-même, lorsque le second point se rapproche indéfiniment du premier, tend vers une certaine limite qui est le *rapport de longueurs* au point considéré et suivant la direction de la tangente. Le point restant fixe, mais la courbe variant, ce rapport passe par un *maximum*  $a$  et un *minimum*  $b$  pour deux directions dites *principales*, qui sont perpendiculaires entre elles sur la carte comme sur le globe. En appelant  $2\omega$  la plus grande altération que puisse éprouver l'angle de deux directions quelconques, et  $S$  le rapport de l'élément superficiel de la carte à l'élément correspondant du globe, on a les formules

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \sin \omega = \frac{a-b}{a+b}, \quad \operatorname{tang} \omega = \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}, \quad \operatorname{tang} \frac{\omega}{2} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}, \\ \operatorname{tang} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2} \right) = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad S = ab, \end{array} \right.$$

la lettre  $\pi$  représentant le rapport de la circonférence au diamètre. Les quantités  $a$ ,  $b$  sont d'ailleurs liées aux rapports de longueurs  $h$ ,  $k$  sur le méridien et sur le parallèle, et à l'altération  $\theta$  qu'éprouve l'angle de ces deux lignes, par les équations

$$(2) \quad a^2 + b^2 = h^2 + k^2, \quad ab = hk \cos \theta.$$

Les systèmes autogonaux sont caractérisés par la condition  $a = b$ , les systèmes aouthaliques par la condition  $ab = 1$ .

Dans tout système authalique, on a

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} a - b = \sqrt{h^2 + k^2 - 2} = \sqrt{\left(h - \frac{1}{h}\right)^2 + \left(\frac{\text{tang } \theta}{h}\right)^2} \\ \qquad \qquad \qquad = \sqrt{\left(k - \frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{\text{tang } \theta}{k}\right)^2}, \\ \text{tang } \omega = \frac{a - b}{2}, \\ a = \text{tang } \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right), \\ b = \text{tang } \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2}\right), \end{array} \right.$$

et, dans tout système authalique à méridiens ou à parallèles automécoïques,

$$(4) \quad \text{tang } \omega = \frac{1}{2} \text{tang } \theta, \quad a - b = 2 \text{tang } \omega, \quad a + b = 2 \text{séc } \omega.$$

Quel que soit le système, les formules précédentes ramènent la recherche des éléments de la déformation,  $a$ ,  $b$ ,  $\omega$ ,  $S$ , à celle des trois quantités  $h$ ,  $k$ ,  $\theta$ .

Dans certains des Tableaux numériques que l'on trouve à la fin de ce Mémoire, et auxquels nous renvoyons à propos de chaque projection, nous avons fait figurer, outre les valeurs de  $a$ ,  $b$ ,  $S$ , celles de leurs inverses, que nous désignons par les lettres  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\Sigma$ , et nous avons aussi introduit des colonnes intitulées ( $a$ ), ( $S$ ), lesquelles contiennent les rapports des valeurs de  $a$ ,  $S$  aux plus petites valeurs que  $b$ ,  $S$  sont susceptibles de prendre dans toute l'étendue de la carte. Les motifs de ces additions ont déjà été donnés ainsi que la discussion des résultats contenus dans les Tableaux.

16. La surface terrestre étant supposée de révolution autour de la ligne des pôles, soient maintenant  $l$  la lati-

tude et  $m$  la longitude d'un point quelconque de cette surface,  $\rho$  le rayon de courbure du méridien en ce point,  $N$  la grande normale, c'est-à-dire la normale au méridien limitée à son point de rencontre avec l'axe de révolution, enfin  $\nu$  le rayon du parallèle. L'arc infiniment petit de méridien compris entre les parallèles de latitudes  $l$  et  $l + dl$  a pour longueur  $\rho dl$ , et l'arc infiniment petit de parallèle compris entre les méridiens de longitudes  $m$  et  $m + dm$  a pour longueur  $\nu dm$ . Les deux arcs correspondants de la carte peuvent être représentés par  $d\sigma$  et  $d\tau$ , les quantités  $\sigma$  et  $\tau$ , ou leurs dérivées prises respectivement par rapport à  $l$  et à  $m$ , étant, ainsi que  $\theta$ , des fonctions de  $l$  et de  $m$  que l'on déduira de la définition du mode de projection. Il vient alors

$$(5) \quad h = \frac{1}{\rho} \left( \frac{d\sigma}{dl} \right), \quad k = \frac{1}{\nu} \left( \frac{d\tau}{dm} \right).$$

Au lieu de  $l$ , on peut adopter comme variable la colatitude ou distance polaire  $\delta$ . On a d'ailleurs

$$\nu = N \cos l = N \sin \delta.$$

Les expressions de  $\rho$  et de  $N$  en fonction de  $l$  ou de  $\delta$  dépendent de la nature du méridien terrestre.

17. Lorsqu'il s'agit de construire une carte à grande échelle avec beaucoup de précision, on tient compte de l'aplatissement dans la définition du mode de projection employé, et les expressions de  $\sigma$  et de  $\tau$  en dépendent. Mais, dans le calcul des altérations, on peut considérer la Terre comme sphérique, car cela revient à négliger de petites fractions des altérations elles-mêmes. On a alors, en prenant le rayon pour unité,  $\rho = 1$ ,  $N = 1$  et  $\nu = \cos l = \sin \delta$ . Les expressions de  $\sigma$  et de  $\tau$  se trouvent modifiées; si nous continuons cepen-

dant à les représenter par les mêmes lettres, il viendra

$$(6) \quad h = \left( \frac{d\sigma}{dl} \right), \quad k = \left( \frac{d\tau}{dm} \right) \text{ séc } l.$$

18. Pour chaque classe de projections, telles que les projections cylindriques, les projections coniques, etc., nous aurons à déterminer celles qui sont autogonales, celles qui sont authaliques. Dans cette recherche, il importe de pouvoir tenir compte au besoin de l'aplatissement, et c'est aux formules (5) que l'on devrait avoir recours; mais nous allons donner le moyen de se rendre indépendant de la forme des méridiens terrestres, en adoptant, au lieu de  $l$  ou de  $\delta$ , une variable convenablement choisie. On peut prendre, pour fixer la position de chaque parallèle, une fonction  $\lambda$  de  $l$  ou de  $\delta$  telle que le canevas des méridiens et des parallèles correspondant aux coordonnées  $\lambda$  et  $m$  décompose la surface terrestre en carrés; si l'on décompose de même le plan en carrés infiniment petits, il suffira, pour avoir un système autogonal, de considérer les lignes des deux canevas comme se correspondant de l'une à l'autre. On obtiendrait de même un système authalique en choisissant une autre variable,  $\zeta$ , fonction de  $l$  ou de  $\delta$ , de manière que le canevas répondant aux coordonnées  $\zeta$  et  $m$  soit formé de rectangles équivalents, et en décomposant aussi le plan de la carte en parallélogrammes infiniment petits équivalents entre eux.

19. La première variable,  $\lambda$ , doit satisfaire à la condition  $\nu d\lambda = \rho dl$ ; on achèvera de la déterminer en se donnant sa valeur pour une certaine valeur de  $l$ ; si, par exemple, on veut que  $\lambda$  et  $l$  s'annulent en même temps, on prendra

$$\lambda = \int_0^l \frac{\rho}{\nu} dl.$$

Il est facile de trouver la signification géométrique de  $\lambda$  : en effet, l'équation différentielle des loxodromies qui coupent les méridiens à  $45^\circ$ , savoir  $\nu dm = \rho dl$ , diffère seulement de la condition ci-dessus,  $\nu d\lambda = \rho dl$ , en ce que  $\lambda$  se trouve remplacé par  $m$ ; il en résulte que  $\lambda$  est égal à la différence de longitude des deux points où l'une quelconque de ces loxodromies rencontre l'équateur et le parallèle de latitude  $l$ , différence qui peut surpasser  $2\pi$ . Lorsqu'on y introduit  $\lambda$  au lieu de  $l$ , les formules (5) deviennent

$$(7) \quad h = \frac{1}{\nu} \left( \frac{d\sigma}{d\lambda} \right), \quad k = \frac{1}{\nu} \left( \frac{d\tau}{dm} \right),$$

de sorte que les systèmes autogonaux se trouvent caractérisés par les conditions

$$\theta = 0, \quad \left( \frac{d\sigma}{d\lambda} \right) = \left( \frac{d\tau}{dm} \right),$$

dans lesquelles ne figurent plus explicitement  $\rho$  ni  $\nu$ ; on a ainsi, entre  $\lambda$ ,  $m$  et les coordonnées d'un point quelconque de la carte, des relations indépendantes de l'aplatissement et même de la forme des méridiens terrestres. Lorsque la Terre est supposée sphérique, l'expression de  $\lambda$  se réduit à

$$\int_0^l \frac{dl}{\cos l} = \log \cot \frac{\delta}{2},$$

les logarithmes étant pris dans le système népérien; d'où l'on conclut que pour trouver des projections autogonales, dans l'hypothèse d'une certaine forme attribuée aux méridiens terrestres, il suffit de résoudre la question en supposant la Terre sphérique, puis de remplacer, dans les résultats obtenus,  $\log \cot \frac{\delta}{2}$  par l'expression de  $\lambda$  qui convient à l'hypothèse adoptée.



20. La seconde variable,  $\zeta$ , doit satisfaire à la condition  $d\zeta = \rho \nu dl$ ; on achèvera de la déterminer en se donnant sa valeur pour une certaine valeur de  $l$ ; si, par exemple, on veut que  $\zeta$  et  $l$  s'annulent en même temps, on prendra

$$\zeta = \int_0^l \rho \nu dl.$$

Il est facile de trouver la signification géométrique de  $\zeta$  : en effet, la zone terrestre comprise entre les parallèles de latitudes  $l$  et  $l + dl$  a pour superficie le produit de la circonférence de l'un de ces parallèles par l'arc de méridien qui les sépare, c'est-à-dire  $2\pi \nu \rho dl$  ou  $2\pi d\zeta$ ; par conséquent, la zone comprise entre l'équateur et le parallèle de latitude  $l$  a pour mesure  $2\pi \zeta$ . Ainsi la variable  $\zeta$  n'est autre chose que le quotient de cette aire par  $2\pi$ , ou bien encore c'est la hauteur d'une zone sphérique équivalente à la zone terrestre, le rayon de la sphère étant égal au rayon équatorial. Lorsqu'on y introduit  $\zeta$  au lieu de  $l$ , les formules (5) deviennent

$$(8) \quad h = \nu \left( \frac{d\sigma}{d\zeta} \right), \quad k = \frac{1}{\nu} \left( \frac{d\tau}{dm} \right),$$

de sorte que les systèmes aouthaliques se trouvent caractérisés par la condition

$$\left( \frac{d\sigma}{d\zeta} \right) \left( \frac{d\tau}{dm} \right) \cos \theta = 1,$$

dans laquelle ne figure plus explicitement  $\rho$  ni  $\nu$ ; on a ainsi entre  $\zeta$ ,  $m$  et les coordonnées d'un point quelconque de la carte une relation indépendante de l'aplatissement et même de la forme des méridiens terrestres. Lorsque la Terre est supposée sphérique, l'expression

de  $\zeta$  se réduit à

$$\int_0^l \cos l \, dl = \sin l,$$

d'où l'on conclut que pour trouver des projections authaliques, dans l'hypothèse d'une certaine forme attribuée aux méridiens terrestres, il suffit de résoudre la question en supposant la Terre sphérique, puis de remplacer, dans les résultats obtenus,  $\sin l$  par l'expression de  $\zeta$  qui convient à l'hypothèse adoptée.

21. On sait que les méridiens terrestres sont sensiblement des ellipses dont l'excentricité a pour carré 0,0068; cette excentricité étant représentée par  $e$ , on a

$$\rho = \frac{1 - e^2}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{3}{2}}}, \quad N = \frac{1}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{1}{2}}};$$

de là résulte

$$\lambda = \log \cot \frac{\delta}{2} + \frac{e}{2} \log \left( \frac{1 - e \cos \delta}{1 + e \cos \delta} \right),$$

$$\zeta = \frac{1 - e^2}{2} \left[ \frac{\sin l}{1 - e^2 \sin^2 l} + \frac{1}{2e} \log \left( \frac{1 + e \sin l}{1 - e \sin l} \right) \right],$$

ou, lorsqu'on néglige les puissances de  $e$  à partir de la quatrième,

$$\lambda = \log \cot \frac{\delta}{2} - e^2 \cos \delta,$$

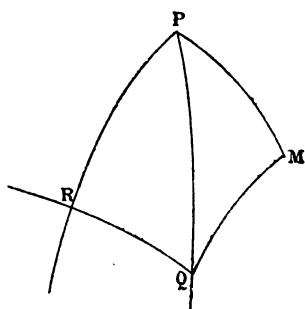
$$\zeta = \left[ 1 - \frac{e^2}{3} (2 + \cos 2l) \right] \sin l.$$

Ce qui précède nous autorise à considérer la Terre comme sphérique soit dans le calcul des altérations, soit dans la recherche de systèmes autogonaux ou authaliques; aussi n'aurons-nous égard à l'aplatissement que pour un petit nombre de projections et afin de donner des exemples de l'emploi des variables  $\lambda$  et  $\zeta$ , ou

d'autres analogues qu'il peut être avantageux de leur substituer.

22. Quand on veut définir les projections obliques et en établir les formules, il est commode d'avoir recours à certains termes, dont la plupart ne sont en usage que pour la sphère céleste, mais que l'on peut appliquer ici à la Terre, considérée comme sphérique, parce que la confusion n'est pas à craindre. Nous dirons donc que, dans une projection oblique, on fait porter sur le pivot, ses verticaux, son horizon rationnel et ses almicanarats les conventions qui, dans la projection directe, portaient sur l'un des pôles, les méridiens, l'équateur et les parallèles; de sorte que les coordonnées des divers points de la carte sont données par les mêmes formules, en fonction des longitudes et des latitudes dans la projection directe, en fonction des azimuts et des hauteurs dans la projection oblique; on peut, dans la première, introduire les distances angulaires ou colatitudes au lieu des latitudes, et, dans la seconde, les distances angulaires au pivot ou distances zénithales au lieu des hauteurs.

Fig. 1.



Soient P (fig. 1) l'un des pôles terrestres, Q le pivot de la projection oblique, PR le premier méridien, QR le

vertical qui joue dans la projection oblique le même rôle que PR dans la projection directe, et à partir duquel nous compterons les azimuts. Joignons P et Q entre eux et à un point quelconque M de la sphère par des arcs de grand cercle. Enfin appelons  $i$  la latitude du pivot ou la hauteur du pôle,  $m_0$  la longitude du pivot,  $q_0$  l'azimut du pôle,  $l$ ,  $m$  et  $\delta$  la latitude, la longitude et la distance zénithale de M,  $p$ ,  $q$  et  $\eta$  la hauteur, l'azimut et la distance zénithale du même point. On aura, sur la figure,

$$PQ = \frac{\pi}{2} - i, \quad \widehat{RPQ} = m_0, \quad \widehat{RQP} = q_0,$$

$$PM = \delta = \frac{\pi}{2} - l, \quad \widehat{RPM} = m,$$

$$QM = \eta = \frac{\pi}{2} - p, \quad \widehat{PQM} = q.$$

Pour obtenir les formules qui donneraient en fonction de  $p$  et de  $q$ , dans la projection oblique, soit les coordonnées d'un point quelconque de la carte, soit les altérations produites en ce point, il suffira d'écrire  $p$  au lieu de  $l$  et  $q$  au lieu de  $m$  dans les formules de la projection directe.

Supposons maintenant que l'on veuille avoir les expressions des coordonnées ou celles des altérations, dans la projection oblique, en fonction, non de  $p$  et de  $q$ , mais des coordonnées géographiques  $l$  et  $m$ . Il faudra d'abord effectuer le changement de lettres qui vient d'être indiqué dans les formules de la projection directe, et ensuite substituer à  $p$  et à  $q$  leurs valeurs en fonction de  $l$  et de  $m$ , lesquelles s'obtiennent par la résolution du triangle sphérique PQM, dans lequel on a

$$\widehat{QPM} = m - m_0, \quad \widehat{PQM} = q - q_0.$$

A cause de la symétrie, il est clair qu'on arriverait encore au résultat en intervertissant l'ordre des opérations, c'est-à-dire en remplaçant, dans les formules primitives,  $l$  et  $m$  par leurs valeurs en fonction de  $p$  et de  $q$ , puis en substituant respectivement aux lettres  $p$  et  $q$  les lettres  $l$  et  $m$ . Le triangle PQM donne

$$\begin{aligned} \sin p &= \sin i \sin l + \cos i \cos l \cos(m - m_0), \\ \text{tang}(q - q_0) &= \frac{\sin(m - m_0)}{\cos i \text{tang} l - \sin i \cos(m - m_0)}. \end{aligned}$$

On obtiendrait  $l$  et  $m$  en fonction de  $p$  et de  $q$  par des permutations de lettres. Ces formules serviront, par exemple, à passer de la projection stéréographique équatoriale à la projection stéréographique sur l'horizon d'un lieu.

Enfin, si l'on veut former l'équation des parallèles ou celle des méridiens de la projection oblique, on éliminera  $l$  et  $m$  entre la première ou la seconde des deux relations ci-dessus et celles qui existent, dans la projection directe, entre  $l$ ,  $m$  et les coordonnées de la carte, puis on remplacera  $p$  par  $l$  ou  $q$  par  $m$  dans l'équation ainsi obtenue.

Lorsque la projection est transverse, on a  $i = 0$ , et les formules ci-dessus deviennent

$$(9) \quad \begin{cases} \sin p = \cos l \cos(m - m_0), \\ \text{tang}(q - q_0) = \cot l \sin(m - m_0). \end{cases}$$

### PROJECTIONS CYLINDRIQUES.

23. Les divers points de la carte étant rapportés à la projection du premier méridien prise pour axe des abscisses et à celle de l'équateur prise pour axe des ordonnées,  $x$  sera une fonction de  $l$  ou de  $\lambda$  variant d'un système de projection à un autre, et l'on aura, d'après la définition commune à toutes les projections cylindriques,

$$\theta = 0, \quad y = nm,$$

$n$  représentant un coefficient constant. On aura de plus [formules (7)]

$$h = \frac{1}{v} \frac{dx}{d\lambda} = v \frac{dx}{d\zeta}, \quad k = \frac{n}{v},$$

ou, en négligeant l'aplatissement,

$$h = \frac{dx}{dl}, \quad k = n \text{ sécl.}$$

D'ailleurs, en chaque point,  $a$  sera la plus grande et  $b$  la plus petite des deux quantités  $h$  et  $k$ .

#### *Projection cylindrique autogonale.*

24. Pour que la projection soit autogonale, il suffit que l'on ait  $a = b$ , c'est-à-dire  $x = n\lambda$ . Les deux coordonnées  $x$  et  $y$  étant ainsi proportionnelles à  $n$ , on peut toujours supposer effectué un changement d'échelle qui ramène ce coefficient à être égal à l'unité. Le système de projection se trouve alors défini par les deux formules

$$x = \lambda, \quad y = m,$$

et l'on a

$$\omega = 0, \quad a = b = \frac{1}{v}, \quad S = \frac{1}{v^2},$$

ou, en négligeant l'aplatissement,

$$a = b = \sec l, \quad S = \sec^2 l.$$

La *projection cylindrique autogonale* est tantôt appelée *projection de Mercator* et tantôt *projection des Cartes réduites* (Tableau I).

Mercator publia sa Mappemonde en 1569, sans faire connaître le procédé à l'aide duquel il déterminait les distances des parallèles de la carte à l'équateur. Vingt ans plus tard, Wrigt indiqua la méthode approchée qui consiste à multiplier la longueur de l'arc d'une minute mesurée sur l'équateur par la somme des sécantes des arcs multiples de celui d'une minute, depuis zéro jusqu'à la latitude du parallèle considéré. C'est seulement en 1645 que Bond donna l'expression exacte de la distance en fonction de cette latitude, la Terre étant supposée sphérique ; le Calcul différentiel n'était pas encore inventé.

La projection précédente est la seule qui soit autogonale, non seulement parmi les projections cylindriques, mais parmi tous les systèmes dans lesquels les parallèles du globe se trouvent représentés, sur la carte, par des droites parallèles entre elles. En effet, pour que les angles des parallèles avec les méridiens soient conservés, il faut que ceux-ci se projettent suivant des droites perpendiculaires aux premières, et, pour que les rectangles infiniment petits formés chacun par l'équateur, le parallèle infiniment voisin et deux méridiens infiniment rapprochés l'un de l'autre soient semblables aux rectangles correspondants de la carte, il faut que les distances des projections des méridiens soient proportionnelles aux différences de longitude.

*Projections cylindriques authaliques.*

25. On a, dans toute projection cylindrique,

$$S = n \frac{dx}{d\xi},$$

de sorte que la condition  $S = 1$  donne ici

$$x = \frac{\xi}{n}.$$

De là résulte que  $a$  est la plus grande et  $b$  la plus petite des deux quantités

$$h = \frac{\nu}{n}, \quad k = \frac{n}{\nu},$$

ou, en négligeant l'aplatissement,

$$h = \frac{1}{n} \cos l, \quad k = n \sec l;$$

la plus grande de ces deux quantités donne aussi la tangente trigonométrique de l'angle  $\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}$ .

Quand on voudra faire usage d'une projection cylindrique authalique, on choisira nécessairement  $n$  plus petit que l'unité, car, si l'on avait pris d'abord  $n > 1$ , on aurait  $a = \frac{n}{\nu}$ , et il suffirait de diminuer  $n$  pour diminuer en chaque point la valeur de  $a$ , ainsi que celle de  $\omega$ , ce qui fournirait une projection plus avantageuse. Supposons donc  $n < 1$ ; alors il y aura, dans chaque hémisphère, un parallèle de latitude  $l_0$  dont le rayon  $\nu_0$  satisfera à la condition  $\nu_0 = n$ . Le long de ce *parallèle moyen*, les altérations d'angles et de longueurs sont nulles; à mesure que l'on s'en éloigne, soit dans un sens, soit dans l'autre,



ces altérations vont en augmentant ; à l'équateur cependant chacune d'elles passe par un *maximum*, pour reprendre ensuite, dans un ordre inverse, les valeurs qu'elle a eues auparavant.

26. *Projection cylindrique aouthalique périgonale pour une zone donnée* (Tableau XLVIII). — Supposons d'abord qu'il s'agisse de trouver la projection cylindrique aouthalique qui est périgonale, et par conséquent aussi périmécoïque, pour une contrée située tout entière d'un même côté de l'équateur. Soient respectivement  $l'$  et  $l''$  la plus petite et la plus grande des latitudes des divers points de cette contrée,  $\nu'$  et  $\nu''$  les rayons des deux parallèles correspondants. Il est clair que  $l_0$  devra être compris entre  $l'$  et  $l''$ , et que les plus grandes altérations se produiront à ces deux latitudes extrêmes ; les valeurs correspondantes de  $a$  seront  $\frac{n}{\nu'}$  et  $\frac{\nu''}{n}$ , et l'on rendra la plus grande aussi faible que possible en choisissant  $n$  de manière qu'elles deviennent égales entre elles ; on prendra donc

$$n = \nu_0 = \sqrt{\nu' \nu''}$$

ou, en supposant la Terre sphérique,

$$n = \cos l_0 = \sqrt{\cos l' \cos l''}.$$

On aura alors, sur les deux parallèles limites,

$$a = \sqrt{\frac{\nu'}{\nu''}}, \quad \sin \omega = \frac{\nu' - \nu''}{\nu' + \nu''},$$

ou, en négligeant l'aplatissement,

$$a = \sqrt{\frac{\cos l'}{\cos l''}}, \quad \sin \omega = \operatorname{tang} \frac{l' + l''}{2} \operatorname{tang} \frac{l'' - l'}{2}.$$

Si la région dont on veut faire la carte est traversée

par l'équateur, on appliquera la méthode précédente à la zone comprise entre cette ligne et le parallèle de latitude  $l''$  qui en est le plus éloigné; on prendra donc

$$n = \sqrt{v''}.$$

27. A  $n = 1$  correspond une projection qui n'est jamais périgonale, puisque cette valeur du paramètre supposerait à la fois  $v' = 1$ ,  $v'' = 1$ , c'est-à-dire  $l' = 0$ ,  $l'' = 0$ . Lorsque l'on considère la Terre comme sphérique, la projection ainsi obtenue se confond avec le *développement cylindrique à équateur automécoïque*, c'est-à-dire celui dans lequel le cylindre substitué à la surface terrestre lui est circonscrit le long de l'équateur (Tableau IX). Les formules relatives à cette projection sont

$$\begin{aligned} x &= \sin l, & y &= m, \\ a &= \sec l, & b &= \cos l, & \text{tang } \omega &= \frac{1}{2} \sin l \text{ tang } l. \end{aligned}$$

Les autres projections cylindriques authaliques deviennent aussi des développements cylindriques quand on néglige l'aplatissement. En effet, un simple changement d'échelle permet de remplacer les formules

$$x = \frac{1}{n} \sin l, \quad y = nm$$

par les suivantes :

$$x = \sin l, \quad y = n^2 m;$$

or ces dernières caractérisent le développement cylindrique dans lequel le rayon du cylindre est égal à  $n^2$ .

#### PROJECTIONS CYLINDRIQUES A MÉRIDIENS AUTOMÉCOÏQUES.

28. Dans une projection cylindrique conservant les longueurs sur les méridiens, les coordonnées d'un point

quelconque de la carte ont pour expressions

$$x = l, \quad y = nm,$$

d'où résulte

$$h = 1, \quad k = n \sec l;$$

nous négligeons ici l'aplatissement, dont il serait cependant facile de tenir compte.

Si l'on fait  $n = 1$ , il viendra

$$a = \sec l, \quad b = 1, \quad \sin \omega = \tan^2 \frac{l}{2},$$

et l'on obtiendra ainsi la *projection cylindrique à équateur et méridiens automécoïques*, connue depuis longtemps sous le nom de *projection des cartes plates carrées* (Tableau XX).

Aux autres valeurs de  $n$  correspondent les diverses *projections des cartes plates parallélogrammatiques*. Dans chacune d'elles, comme il ne peut y avoir avantage à prendre  $n > 1$ , le degré de longitude de la carte est égal à celui d'un certain *parallèle moyen*, dont la latitude  $l_0$  a pour cosinus  $n$ . Pour tout point situé entre le parallèle moyen et son antiparallèle, on a

$$a = 1, \quad b = S = \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2} \right) = \frac{\cos l_0}{\cos l},$$

et, pour tout point extérieur à la zone que limitent ces deux lignes,

$$a = S = \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2} \right) = \frac{\cos l_0}{\cos l}, \quad b = 1;$$

le long de chacune d'elles, il n'y a pas d'altération; à mesure que l'on s'en écarte, soit dans un sens, soit dans l'autre, les plus grandes valeurs des altérations augmentent; toutefois, elles passent par des maxima lorsqu'on arrive à l'équateur.

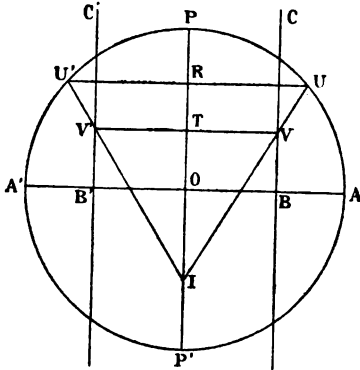
Dans la projection qui correspond au parallèle moyen de  $45^\circ$  (Tableau XXI), le maximum équatorial de  $\omega$  est l'angle qui a pour sinus  $\frac{1}{3}$ .

Avant d'inscrire les valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $S$  contenues dans le Tableau relatif à cette projection, on a effectué un changement d'échelle ayant pour effet de rendre le rapport de surfaces le long de l'équateur égal à l'unité, c'est-à-dire qu'on a multiplié les deux premières séries de valeurs par  $\sqrt[4]{2}$  et la troisième par  $\sqrt{2}$ .

**DÉVELOPPEMENTS DE PERSPECTIVES ÉPICYLINDRIQUES  
A POINT DE VUE FIXE.**

29. Nous avons dit que dans ces sortes de projections on prend les perspectives des divers points de la surface terrestre sur un cylindre qui est de révolution autour de la ligne des pôles, le point de vue se trouvant situé sur cette ligne ; puis on développe le cylindre.

Fig. 2.



Soient  $O$  (*fig. 2*) le centre du globe,  $P$  et  $P'$  les deux pôles,  $I$  le point de vue,  $R$  le centre du parallèle de

latitude  $l$ ; prenons pour plan de la figure celui qui est perpendiculaire au méridien à partir duquel on compte les longitudes : il coupera la sphère suivant une circonférence  $APA'P'$ , le cylindre suivant deux génératrices  $BC$ ,  $B'C'$ , le parallèle de latitude  $l$  suivant une droite  $UU'$ , perpendiculaire à  $PP'$ . Tirons  $IU$ ,  $IU'$ , afin d'obtenir en  $V$ ,  $V'$  les perspectives de  $U$ ,  $U'$  sur le cylindre; tirons ensuite  $VV'$ , et soit  $T$  son point de rencontre avec l'axe  $PP'$ . Enfin désignons par  $D$  la distance  $OI$  du point de vue au centre et par  $n$  le rayon  $OB$  du cylindre, celui du globe étant pris pour unité.

La perspective du parallèle considéré se développera suivant une droite dont la distance  $x$  à l'équateur de la Carte sera égale à  $OT$ . Or les triangles semblables  $ITV$ ,  $IRU$  donnent

$$IT = \frac{TV \times IR}{RU},$$

et l'on a

$$IT = x + D, \quad TV = n, \quad IR = D + \sin l, \quad RU = \cos l;$$

il vient donc

$$x = \frac{n(D + \sin l)}{\cos l} - D.$$

Le méridien de longitude  $m$  se trouve remplacé par une droite dont la distance au premier méridien de la carte est égale à l'arc de la section droite du cylindre compris entre les plans des deux méridiens; on a donc aussi

$$y = nm.$$

On conclut de là

$$a = n(1 + D \sin l) \sec^2 l, \quad b = n \sec l.$$

30. Lorsque le point de vue est au centre de la sphère,

la projection conserve la même forme, quel que soit le rayon du cylindre. Supposons donc que ce cylindre soit tangent au globe le long de l'équateur; il viendra

$$x = \text{tang} l, \quad a = \text{séc}^2 l.$$

La projection ainsi obtenue sert de transition entre les deux classes de développements de perspectives épicylindriques.

#### DÉVELOPPEMENTS DE PERSPECTIVES ÉPICYLINDRIQUES A POINT DE VUE MOBILE.

31. Ces projections diffèrent des précédentes en ce que le point de vue, au lieu d'être fixe et placé sur la ligne des pôles, décrit une circonférence concentrique à l'équateur et situé dans le plan de cette ligne, de manière à toujours se trouver dans le plan du méridien dont la longitude surpasse de  $180^\circ$  celle du lieu terrestre qu'il s'agit de placer sur la carte. Ce qui peut varier d'une projection à l'autre, c'est le rayon du cylindre et celui de la circonférence parcourue par le point de vue. Le P. Braun en a proposé deux en 1868 (*les Mondes*, 2<sup>e</sup> série, t. XVII), dans lesquelles le cylindre se trouve circonscrit au globe le long de l'équateur; il les appelle *projection stéréographique à cylindre* (Tableau XXII) et *projection de Mercator modifiée* (Tableau XXIII) : dans la première, le point de vue reste sur l'équateur; dans la seconde, sa distance au centre n'est que les quatre dixièmes du rayon. Celle-ci modifie peu les angles, si ce n'est dans les hautes latitudes; l'autre produit des altérations d'angles un peu plus fortes, mais en atténuant l'amplification des surfaces.

Les formules relatives au développement de perspective épicylindrique à point de vue mobile sur l'équateur

sont

$$x = 2 \operatorname{tang} \frac{l}{2}, \quad y = m,$$

$$a = \operatorname{sec} l, \quad b = \operatorname{sec}^2 \frac{l}{2}.$$

Dans l'autre projection du P. Braun, on a

$$x = \frac{14 \sin l}{4 + 10 \cos l}, \quad y = m,$$

$$a = \operatorname{sec} l, \quad b = \frac{14(10 + 4 \cos l)}{(4 + 10 \cos l)^2}.$$

Les angles sont conservés le long de l'équateur et le long du parallèle dont la latitude a pour cosinus  $\frac{4}{11}$ , ce qui correspond à  $68^\circ 40' 35''$ . Dans l'intervalle, la plus grande altération d'angle passe par un maximum qui n'atteint pas  $2^\circ 30'$ ; elle augmente de plus en plus rapidement à mesure qu'on s'éloigne du parallèle dont nous venons de parler en se rapprochant du pôle. Pour tous les points de la calotte sphérique limitée par ce parallèle, il faut changer  $a$  en  $b$  dans les formules précédentes, et réciproquement.

#### PROJECTIONS CYLINDRIQUES TRANSVERSES.

32. D'après la définition que nous avons donnée des projections transverses, pour déduire d'une projection cylindrique directe une projection transverse qui lui corresponde, il suffit de substituer à l'équateur un méridien convenu que nous appellerons *premier méridien* et à partir duquel nous compterons les longitudes, aux parallèles les petits cercles dont les plans sont parallèles à celui du méridien convenu, aux pôles les pôles de ce méridien, lesquels sont situés dans le plan de l'équateur

et qui deviennent les pivots de la projection, enfin aux autres méridiens les grands cercles passant par les pivots. Les coordonnées jouant alors le rôle de la latitude  $l$  de la colatitude  $\delta$  et de la longitude  $m$  d'un point quelconque sont respectivement la distance sphérique  $p$  de ce point au premier méridien, sa distance angulaire  $\eta$  à l'un des pivots, et l'angle  $q$  de l'équateur avec le grand cercle mené par les pivots et le point considéré.

Nous obtiendrons les formules et les Tables de la projection transverse en remplaçant dans celles de la projection directe les lettres  $l, \delta, m$  par les lettres  $p, \eta, q$ . Si ensuite nous voulons exprimer les coordonnées  $x$  et  $y$  d'un point quelconque de la carte, ou bien encore les éléments de la déformation, en fonction de  $l$  et de  $m$ , il nous suffira de substituer à  $p$  et à  $q$  les valeurs que fournissent les équations (9); ici, comme les pivots sont dans le plan de l'équateur et que le premier méridien de la projection directe se trouve remplacé par l'équateur dans la projection transverse, les angles que nous avons désignés par  $m_0, q_0$  sont droits et les deux équations deviennent

$$\begin{aligned}\sin p &= \cos l \sin m, \\ \text{tang } q &= \text{tang } l \sec m.\end{aligned}$$

33. *Projection cylindrique autogonale transverse.*— Elle a été proposée par Lambert pour les contrées traversées par un méridien dans le sens de leur plus grande dimension. Les formules qui lui conviennent se déduisent de celles de la projection cylindrique autogonale directe, ou projection de Mercator, par la méthode qui vient d'être indiquée; elles sont, l'axe des  $x$  restant sur la ligne des pôles de la carte,

$$x = q, \quad y = \log \cot \frac{\eta}{2} = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin p}{1 - \sin p}$$



ou bien encore

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang} l \operatorname{sec} m, \quad y = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \cos l \sin m}{1 - \cos l \sin m}.$$

On obtiendrait l'équation d'un méridien quelconque de la carte en éliminant  $l$  entre ces deux équations, et celle d'un parallèle en éliminant  $m$ .

Le Tableau I donne les valeurs de  $a$  et de  $S$  pour les valeurs de  $p$  qui se trouvent inscrites dans la colonne intitulée  $l$ ; les Tableaux II, qui sont à double entrée, donnent, le premier les valeurs de  $a$  et le second les valeurs de  $S$  pour les points qui ont des longitudes et des latitudes multiples de  $15^\circ$ .

34. *Développement cylindrique transverse.* — Le cylindre étant supposé circonscrit à la surface terrestre, on aura

$$x = q, \quad y = \sin p,$$

et par conséquent

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang} l \operatorname{sec} m, \quad y = \cos l \sin m$$

(Tableau IX, dans lequel on substituera  $p$  à  $l$  en tête de la première colonne).

35. *Projection de Cassini.* — Sur la carte de France de Cassini, chaque point se trouve déterminé par deux coordonnées rectangulaires égales, l'une à la distance à laquelle le point correspondant du globe se trouve de la méridienne de Paris, et l'autre à la longueur de cette méridienne comprise entre Paris et le pied du grand cercle sur laquelle se mesure la distance à la méridienne. La projection est donc une projection des cartes plates carrées transverse. Si, au lieu de prendre la projection de Paris pour origine des coordonnées de la carte, nous

prenons la projection du point où le méridien de Paris coupe l'équateur, nous aurons

$$x = q, \quad y = p$$

ou bien

$$\text{tang } x = \text{tang } l \sec m, \quad \sin y = \cos l \sin m$$

( Tableau XX, dans lequel on substituera  $p$  à  $l$  en tête de la première colonne ).



**PROJECTIONS MÉRICYLINDRIQUES.**

36. Dans une projection méricylindrique,  $x$  est fonction de  $l$  seulement, mais  $y$  est fonction de  $l$  et de  $m$ . Considérons le triangle rectangle qui a pour hypoténuse un arc infiniment petit de méridien sur la carte et dont les côtés de l'angle droit sont formés, le premier par le parallèle de l'une des extrémités de cet arc, le second par la perpendiculaire abaissée de l'autre extrémité sur le même parallèle. Ce second côté est égal à  $dx$  et l'angle adjacent à  $\theta$ ; l'autre côté de l'angle droit est égal à  $\left(\frac{dy}{dl}\right) dl$ ; on a donc, dans le triangle, abstraction faite des signes,

$$(10) \quad \text{tang } \theta = \frac{\left(\frac{dy}{dl}\right)}{\left(\frac{dx}{dl}\right)};$$

l'arc infiniment petit de méridien qui forme l'hypoténuse du triangle étant égal à  $\text{séc } \theta dx$ , il vient

$$(11) \quad h = \frac{1}{\rho} \text{séc } \theta \frac{dx}{dl};$$

l'arc infiniment petit de parallèle a pour longueur  $\left(\frac{dy}{dm}\right) dm$ , d'où résulte

$$(12) \quad k = \frac{1}{v} \left(\frac{dy}{dm}\right);$$

enfin, chacun des parallélogrammes infiniment petits qui forment le canevas a pour base  $\left(\frac{dy}{dm}\right) dm$  et pour

hauteur  $dx$ ; on a donc

$$S = \frac{1}{\rho r} \frac{dx}{dl} \left( \frac{dy}{dm} \right) = \frac{dx}{dz} \left( \frac{dy}{dm} \right).$$

**PROJECTIONS MÉRICYLINDRIQUES AUTHALIQUES.**

37. Aucune projection méricylindrique n'est autogonale; il y en a au contraire une infinité qui sont authaliques. On peut établir géométriquement leurs propriétés de la manière suivante.

Considérons la section faite dans la surface terrestre par un plan contenant la ligne des pôles et choisissons à volonté la forme de la courbe qui doit lui servir de projection; enfin, déterminons les dimensions de cette courbe de manière que l'aire intérieure soit équivalente à la moitié de la superficie du globe, c'est-à-dire qu'elle ait pour mesure le produit de  $2\pi$  par la valeur de  $\zeta$  qui correspond à  $l = \frac{\pi}{2}$ . Si l'on divise cette aire en deux parties équivalentes par une droite ayant la direction que l'on veut donner aux parallèles de la carte, on obtiendra la projection de l'équateur. Pour avoir celle du parallèle de latitude  $l$ , ou pour exprimer, en fonction de  $l$ , la distance de cette projection à l'équateur, il suffira d'écrire que le trapèze curviligne auquel ces deux droites servent de base est équivalent à la demi-zone terrestre correspondante, c'est-à-dire qu'il a pour mesure  $\pi\zeta$ ; de l'équation ainsi obtenue résultera le tracé des parallèles de la carte. Remarquons maintenant que, si l'on divise dans un rapport donné diverses cordes d'une même courbe parallèles entre elles, le lieu des points de division partage à son tour dans le même rapport, non seulement l'aire totale, mais celle de chacun des trapèzes curvilignes. D'après cela, sur la carte que nous voulons construire, le premier méridien ne sera autre chose que

le lieu des milieux des cordes qui servent de projections aux parallèles; de plus, pour avoir la projection du méridien de longitude  $m$ , il suffira de diviser, dans le rapport de  $m$  à  $\frac{\pi}{2}$ , la portion de chaque corde qui se trouvera comprise entre le premier méridien et celui qui limite la carte, puis de joindre les points de division entre eux par un trait continu. Sur une projection ainsi tracée, l'aire comprise entre deux méridiens et deux parallèles quelconques est équivalente à celle de la figure terrestre correspondante, d'où il est facile de conclure que les surfaces sont partout conservées. Le système se prête facilement à la représentation du globe entier sur une seule carte.

Nous n'avons à considérer, en fait de projections, que celles dans lesquelles le premier méridien est représenté par une ligne droite, ce qui suppose seulement que la courbe adoptée pour le contour de la carte est symétrique par rapport à cette droite. Les deux pôles seront placés aux extrémités de l'axe de symétrie.

D'après le tracé des méridiens, le prolongement de cet axe est coupé en un même point par les prolongements de toutes les cordes que l'on peut obtenir en joignant entre eux les deux points où un méridien quelconque est rencontré par deux parallèles donnés, d'où il résulte que les tangentes aux divers méridiens de la carte dont les points de contact appartiennent à un même parallèle sont concourantes. L'angle de chacune avec la projection du premier méridien n'est autre que l'angle  $\theta$  pour le point de contact correspondant; il augmente donc avec la longitude, et, en appelant  $\Theta$  la fonction de  $l$  ou de  $\zeta$  qui donne sa valeur sur le méridien limite, on a

$$\text{tang } \theta = \frac{2m}{\pi} \text{ tang } \Theta.$$

Nous avons vu que, sur un même parallèle de la carte, l'ordonnée d'un point quelconque ou sa distance au premier méridien est dans un rapport constant avec la longitude du point correspondant du globe; nous pouvons prendre comme donnée de la question la fonction  $Z$  de  $\zeta$  qui exprime ce rapport; l'ordonnée d'un point quelconque de la courbe qui limite la carte d'un hémisphère sera

$$Y = \frac{\pi}{2} Z,$$

et celle d'un point quelconque de la carte

$$y = mZ.$$

Cherchons aussi l'abscisse. Le trapèze compris entre deux parallèles de la carte infiniment voisins a pour surface  $2Y dx$  ou  $\pi Z dx$ , et la demi-zone correspondante du globe  $\pi d\zeta$ ; on a donc

$$Z dx = d\zeta,$$

d'où

$$x = \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{Z}.$$

En choisissant  $Z$  constant, on retomberait sur le groupe des projections cylindriques authaliques.

Inversement, si l'on connaît  $x$  en fonction de  $l$ , et par conséquent aussi en fonction de  $\zeta$ , on en déduira immédiatement  $Z$  par la formule

$$\frac{1}{Z} = \frac{dx}{d\zeta}.$$

Enfin, si le rapport de  $y$  à  $m$  est donné, non par une fonction de  $l$  ou de  $\zeta$ , mais par une fonction  $X$  de  $x$ , autrement dit, si l'on connaît l'équation  $y = mX$  d'un méridien quelconque de la carte ou bien encore l'équa-

tion  $y = \frac{\pi}{2} X$  du méridien limite, on aura  $X dx = d\zeta$ ,  
d'où

$$\int_0^x X dx = \zeta.$$

Telle sera la relation entre  $x$  et  $\zeta$  qui exprimera comment la distance d'un parallèle de la carte à l'équateur varie avec la latitude.

Les formules (10) et (12) font connaître  $\theta$  et  $k$ , et l'on peut en déduire  $h$  à l'aide de l'équation  $hk \cos \theta = 1$ ; on trouve ainsi

$$\text{tang } \theta = mZ \frac{dZ}{d\zeta}, \quad h = \frac{\nu}{Z} \sec \theta, \quad k = \frac{Z}{\nu};$$

on a encore, d'après les formules (3),

$$\text{tang } \omega = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{Z}{\nu} - \frac{\nu}{Z}\right)^2 + \nu^2 \left(\frac{dZ}{d\zeta}\right)^2} m^2,$$

ce qui prouve que, sur un même parallèle, les altérations vont en augmentant du premier méridien au méridien limite.

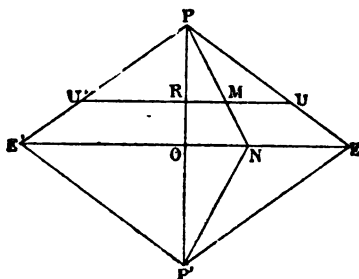
*Projections méricylindriques authaliques à méridiens rectilignes.*

38. Convenons de représenter le méridien qui limite un hémisphère terrestre par le contour d'un losange PEP'E' (*fig. 3*), la moitié de l'équateur par une diagonale EE', et les deux pôles par les extrémités P, P' de l'autre diagonale; de plus, la moitié OP de cette dernière étant désignée par  $n$  lorsqu'on prend le rayon du globe pour unité, supposons que la moitié OE de la première ait pour longueur  $\frac{\pi}{n}$ , afin que la surface du losange soit

égale à  $2\pi$ , comme celle de l'hémisphère. A ces données correspondra une projection hémicylindrique authalique qu'il s'agit d'obtenir.

Soit  $UU'$  la projection du parallèle de latitude  $l$ , et soit  $R$  le point de rencontre des deux droites  $PP'$ ,  $UU'$ . On sait que toute calotte sphérique est équivalente au

Fig. 3.



cercle qui aurait pour rayon la corde de l'arc générateur; le triangle  $UPU'$  doit donc être la moitié d'un cercle ayant pour rayon la corde de l'arc  $\frac{\pi}{2} - l$  dans la circonférence de rayon 1, et le triangle  $EPE'$  doit être la moitié d'un autre cercle ayant pour rayon la corde du quadrant dans la même circonférence. Mais ces deux triangles sont entre eux dans le rapport des carrés des hauteurs  $RP$ ,  $OP$ . Donc les deux hauteurs sont proportionnelles aux deux cordes, ce qui détermine  $RP$ . De là résulte la construction suivante. On prend sur  $PP'$ , à partir du point  $P$ , une longueur égale à la diagonale du carré dont le côté est  $OP$ , puis, sur la ligne ainsi obtenue comme diamètre, on décrit une circonférence. Sur cette circonférence, à partir de l'un des points qui sont à  $90^\circ$  de  $P$ , on prend des arcs mesurant les latitudes des divers parallèles; enfin, de  $P$  comme

T.



centre, on décrit des circonférences passant par les extrémités de ces arcs; les points où elles rencontrent  $PP'$  appartiennent aux projections des parallèles correspondants.

Prenons maintenant sur  $OE$  une longueur  $ON$  qui soit avec  $OE$  dans le rapport de la longitude  $m$  d'un demi-méridien quelconque avec  $\frac{\pi}{2}$ ; tirons  $NP$  ainsi que  $NP'$ ; soit  $M$  le point de rencontre de  $NP$  avec  $UU'$ . Le rapport des aires des triangles  $PRM$ ,  $PRU$  sera aussi égal au rapport de  $m$  à  $\frac{\pi}{2}$ , et, comme le second triangle est équivalent au quart de la calotte sphérique que détache le parallèle de latitude  $l$ , le premier sera équivalent à la portion de cette calotte qui se trouve comprise entre le premier méridien et le méridien de longitude  $m$ . Pour achever de remplir la condition de conservation des aires, il suffit donc de considérer la ligne brisée  $PNP'$  comme étant la projection du demi-méridien de longitude  $m$  et d'opérer d'une manière analogue pour les autres méridiens. On remarquera que les constructions qui viennent d'être indiquées se prêtent à la représentation du globe entier sur une seule carte, dont le contour sera formé par un losange ayant une diagonale égale à  $PP'$  et l'autre au double de  $EE'$ .

Les différentes lignes de la figure s'expriment immédiatement, d'après ce qui précède, en fonction de  $l$  ou de  $\delta$  et de  $m$ . On a

$$RP = n\sqrt{2} \sin \frac{\delta}{2}, \quad ON = \frac{2}{n} m,$$

d'où l'on conclut, pour les coordonnées du point  $M$  de la carte,

$$x = n \left( 1 - \sqrt{2} \sin \frac{\delta}{2} \right), \quad y = \frac{2\sqrt{2}}{n} \sin \frac{\delta}{2} m.$$

Pour tous les points du méridien PN, l'angle  $\theta$  est égal à l'angle OPN et sa tangente au rapport de ON à OP ; on obtient la valeur de  $k$  en divisant  $y$  par  $m \sin \delta$  ; enfin la condition  $hk \cos \theta = 1$  fait connaître  $h$ . On trouve ainsi

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{\gamma}{n^2} m, \quad h = \frac{n}{\sqrt{2}} \cos \frac{\delta}{2} \sec \theta, \quad k = \frac{\sqrt{2}}{n} \sec \frac{\delta}{2},$$

d'où l'on tire encore, en ayant égard aux formules (3),

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{1}{n \sqrt{2}} \cos \frac{\delta}{2} \sqrt{\left(\frac{n^2}{2} - \sec^2 \frac{\delta}{2}\right)^2 + m^2};$$

enfin, lorsqu'on aura calculé  $\omega$ , les dernières de ces formules feront connaître  $a$  et  $b$ . L'angle  $\omega$  et le rapport  $a$  augmentent avec la longitude.

Si, au lieu d'étudier ces projections directement, on avait voulu tirer leurs propriétés des formules qui s'appliquent à tous les systèmes méricylindriques authaliques, il aurait suffi d'introduire dans ces dernières soit l'expression ci-dessus de  $x$ , soit l'une des deux suivantes :

$$Z = \frac{\gamma \sqrt{2}}{n} \sin \frac{\delta}{2}, \quad X = \frac{\gamma}{n} \left(1 - \frac{x}{n}\right).$$

Les projections authaliques à méridiens et parallèles rectilignes ont été imaginées en 1865 par M. Édouard Collignon, qui, considérant plus spécialement le cas où le contour de la carte d'un hémisphère serait formé par un carré, a traité la question analytiquement et a déduit de ses formules les constructions géométriques données plus haut. Nous allons chercher à nous rendre compte de la manière dont varient les altérations dans ce cas spécial.

### 39. La projection méricylindrique authalique à méri-

*diens rectilignes et à contour carré* (Tableaux XVII) correspond à  $n = \sqrt{\pi}$ , ce qui donne

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos \frac{\delta}{2} \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} - \sec^2 \frac{\delta}{2}\right)^2 + m^2}.$$

Sur le premier méridien, on a  $\omega = 0$  pour  $\sec \frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ , c'est-à-dire pour  $l = 15^{\circ} 51' 20''$ ; le point ainsi déterminé sur la carte est le seul où les angles ne subissent pas d'altération. Quand, à partir de ce point, on suit le premier méridien pour se diriger soit vers le pôle, soit vers l'équateur,  $\omega$  va constamment en augmentant, ainsi que le montrent les formules

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} \omega &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos \frac{\delta}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \sec^2 \frac{\delta}{2} \right), \\ \operatorname{tang} \omega &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sec \frac{\delta}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{\delta}{2}, \end{aligned}$$

qui conviennent respectivement à ces deux cas.

Sur le méridien qui limite la carte d'un hémisphère, les valeurs de  $\omega$  et de  $a$  vont constamment en augmentant de l'équateur au pôle, comme on le voit sur les formules

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} \omega &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos \frac{\delta}{2} \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} - \sec^2 \frac{\delta}{2}\right)^2 + \frac{\pi^2}{4}}, \\ \operatorname{tang} \omega &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos \frac{\delta}{2} \sqrt{\left(\sec^2 \frac{\delta}{2} - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi^2}{4}}, \end{aligned}$$

dont la première doit être appliquée entre le pôle et le point pour lequel on a  $\sec \frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ , la seconde entre ce point et l'équateur. Sur celle-ci, on ne voit pas de suite

comment  $\omega$  varie avec  $\delta$ ; mais on peut l'écrire

$$\text{tang } \omega = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \sqrt{(\sqrt{2}-1)\pi + \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cos \frac{\delta}{2} - \sec \frac{\delta}{2}\right)^2};$$

comme  $\frac{\delta}{2}$  ne doit croître que jusqu'à  $\frac{\pi}{4}$ , et par conséquent

$\sec \frac{\delta}{2}$  jusqu'à  $\sqrt{2}$ , comme d'autre part on a  $\pi > 2\sqrt{2}$ ,

la quantité  $\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cos \frac{\delta}{2} - \sec \frac{\delta}{2}$  reste toujours positive; d'ail-

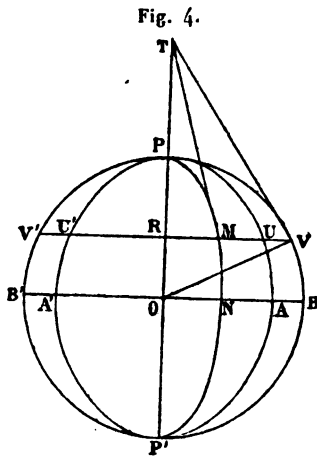
leurs, elle diminue quand  $\delta$  augmente, ou inversement.

La limite vers laquelle tend la valeur de la plus grande altération d'angle à mesure que l'on se rapproche du pôle varie d'un méridien à un autre. Son *maximum*, ainsi qu'on l'a déjà vu, correspond au méridien qui limite l'hémisphère; il est égal à  $49^{\circ} 21'$ . Mais il est clair qu'il y a au pôle une altération d'angle plus considérable que celle-là puisqu'elle est de  $90^{\circ}$ : c'est celle qui provient de ce qu'en ce point se trouve l'angle de la ligne brisée suivant laquelle se projette le méridien principal. La même altération se produit aussi aux autres sommets du carré.

### *Projections méricylindriques aouthaliques à méridiens elliptiques.*

40. Adoptons, pour représenter le méridien qui limite un hémisphère, l'ellipse  $APA'P'$  (*fig. 4*), dont l'un des axes,  $AA'$ , sera la projection de l'équateur, et dont les extrémités de l'autre,  $P, P'$ , seront les projections des pôles. La moitié  $OP$  de l'axe  $PP'$  étant désignée par  $n$ , la moitié  $OA$  de l'autre axe devra être égale à  $\frac{2}{n}$ , afin que l'ellipse ait la même surface que l'hémisphère.

Soit  $UU'$  la projection du parallèle de latitude  $l$ ; appelons  $R$  le point où elle rencontre  $PP'$ , et  $V, V'$  ceux où elle coupe la circonférence  $PBP'B'$ , décrite sur  $PP'$  comme diamètre; tirons  $OV$ . La droite  $UU'$  sera déterminée de position quand on connaîtra l'angle  $BOV$ , que nous dési-



gnerons par  $l'$ ; or l'aire du trapèze circulaire  $BV B'V'$  a pour mesure  $n^2 l' + \frac{n^2}{2} \sin 2l'$ , et celle du trapèze elliptique  $AU U' A'$ , qui est avec la première dans le rapport de  $OA$  à  $OB$  ou de  $2$  à  $n^2$ , a pour mesure  $2l' + \sin 2l'$ ; pour qu'elle soit la même que celle de la demi-zone projetée sur le second trapèze, il faut qu'on ait

$$2l' + \sin 2l' = \pi \sin l;$$

cette équation a été réduite en Tables, à l'aide desquelles on obtient la valeur de  $l'$  qui correspond à toute valeur donnée de  $l$ .

Pour représenter le demi-méridien de longitude  $m$ , prenons sur  $OA$  une longueur  $ON$  qui soit avec  $OA$  dans

le rapport de  $m$  à  $\frac{\pi}{2}$ , c'est-à-dire une longueur égale à  $\frac{4}{\pi n} m$ , et construisons la demi-ellipse  $PMNP'$ ; soit  $M$  le point où elle rencontre  $UU'$ . Le rapport des deux trapèzes elliptiques  $ONMR$ ,  $OAUR$  sera le même que celui de  $ON$  à  $OA$ , par conséquent le même que celui des deux portions de zone sphérique auxquelles ils servent de projections. Or, le second trapèze est équivalent à la plus grande de ces deux portions; donc l'autre est équivalent à la plus petite, ce qui prouve que les aires ne sont pas altérées.

Le point  $M$  de la carte a pour coordonnées

$$OR = OV \sin BOV, \quad RM = \frac{ON}{OB} RV = ON \cos BOV,$$

ce qui donne

$$x = n \sin l', \quad y = \frac{4}{\pi n} \cos l' m.$$

Menons en  $M$  la tangente à l'ellipse  $PNP'$ , et en  $V$  la tangente à la circonférence  $PBP'$ ; ces deux tangentes rencontreront le prolongement de  $PP'$  au même point  $T$ , et feront avec  $PP'$  deux angles respectivement égaux à  $\theta$  et à  $l'$ ; les tangentes trigonométriques de ces angles sont d'ailleurs entre elles dans le rapport de  $RM$  à  $RV$  ou de  $ON$  à  $OB$ ; on a donc

$$\text{tang } \theta = \frac{4}{\pi n^2} \text{tang } l' m.$$

De l'expression de  $y$  on conclut immédiatement

$$k = \frac{4}{\pi n} \text{sécl } \cos l'.$$

Les formules habituelles des projections authaliques font connaître ensuite  $h$ ,  $\omega$ ,  $a$  et  $b$ .

Suivant que l'on donne telle ou telle valeur au paramètre  $n$ , on obtient l'une ou l'autre des projections du groupe que nous considérons.

41. *Projection authalique de Mollweide, dite projection homolographique de Babinet* (Tableaux XIII).

— Elle correspond à  $n = \sqrt{2}$ , ce qui donne

$$x = \sqrt{2} \sin l', \quad y = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cos l' m,$$

$$\text{tang } \theta = \frac{2}{\pi} \text{tang } l' m, \quad k = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sec l' \cos l'.$$

La région infiniment petite dans laquelle il ne se produit pas de déformation est celle du point du premier méridien pour lequel on a

$$2\sqrt{2} \cos l' = \pi \cos l;$$

il se trouve à une latitude intermédiaire entre  $42^\circ$  et  $42^\circ 30'$ .

Au pôle, les altérations d'angles vont jusqu'à  $180^\circ$ , et les altérations de longueurs jusqu'à l'infini.

*Projections méricylindriques authaliques à méridiens sinusoidaux.*

42. Si l'on fait croître les distances des parallèles de la carte à l'équateur proportionnellement aux latitudes, on aura,  $n$  désignant une constante,

$$x = nl, \quad L = \frac{1}{n} \cos l, \quad y = \frac{m}{n} \cos l,$$

$$\text{tang } \theta = \frac{m}{n^2} \sin l, \quad h = n \sec \theta, \quad k = \frac{1}{n},$$

$$\text{tang } \omega = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{n} \dots n\right)^2 + \frac{m^2}{n^2} \sin^2 l}.$$

La dernière formule montre que, si l'on avait pris d'abord  $n < 1$ , il y aurait avantage à lui donner une valeur plus forte. C'est donc parmi les valeurs de  $n$  plus grandes que l'unité qu'il faut faire un choix, et l'expression de  $\text{tang } \omega$  doit s'écrire

$$\text{tang } \omega = \frac{1}{2} \sqrt{\left(n - \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{m^2}{n^2} \sin^2 l.}$$

Le maximum de  $\omega$  a lieu au pôle sur le méridien limite. Soit  $\Omega$  ce maximum dans la représentation d'un hémisphère; on aura

$$\text{tang } \Omega = \frac{1}{2} \sqrt{\left(n - \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{\pi^2}{4n^2}},$$

ce qui, pour  $n < \sqrt[4]{1 + \frac{\pi^2}{4}}$ , revient à

$$\text{tang } \Omega = \frac{1}{2} \sqrt{2 \left( \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}} - 1 \right) + \left( \frac{1}{n} \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}} - n \right)^2},$$

et, pour  $n > \sqrt[4]{1 + \frac{\pi^2}{4}}$ , à

$$\text{tang } \Omega = \frac{1}{2} \sqrt{2 \left( \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}} - 1 \right) + \left( n - \frac{1}{n} \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}} \right)^2}.$$

La première de ces deux expressions prouve que, si l'on fait augmenter  $n$  de 1 à  $\sqrt[4]{1 + \frac{\pi^2}{4}}$ ,  $\Omega$  ira toujours en diminuant, et la seconde que, si l'on continue à faire augmenter  $n$ ,  $\Omega$  augmentera à son tour. La plus petite valeur de  $\Omega$  correspond donc à

$$n = \sqrt[4]{1 + \frac{\pi^2}{4}},$$



et, en adoptant cette valeur de  $n$ , on obtiendra la *projection méricylindrique authalique à méridiens sinusoidaux qui est périgonale pour un hémisphère* (Tableau XV).

43. Tant que  $n$  est différent de l'unité, il n'y a aucune région de la carte n'offrant pas de déformation. Au contraire, pour  $n = 1$ , ce qui donne la *projection sinusoidale de Nicolas Sanson, dite projection de Flamsteed* (Tableaux XIV), il ne se produit aucune altération le long de l'équateur ni le long du premier méridien. On a, dans cette projection,

$$\begin{aligned}x &= l, & y &= m \cos l, \\ \text{tang } \theta &= m \sin l, & h &= \sec \theta, & k &= 1, \\ \text{tang } \omega &= \frac{1}{2} \text{ tang } \theta = \frac{1}{2} m \sin l.\end{aligned}$$

*Autre groupe de projections méricylindriques authaliques.*

44. Considérons encore les projections dans lesquelles les parallèles de la carte interceptent sur le premier méridien des longueurs proportionnelles à celles qu'ils interceptent dans la projection stéréographique méridienne, c'est-à-dire prenons

$$x = n \text{ tang } \frac{l}{2},$$

$n$  étant une constante; on conclut de là

$$L = \frac{2}{n} \cos l \cos^2 \frac{l}{2}, \quad y = \frac{2}{n} m \cos l \cos^2 \frac{l}{2},$$

et il est facile de voir que les méridiens seront des courbes

algébriques du cinquième degré. Il vient de plus

$$\text{tang } \theta = \frac{4}{n^2} m \sin^3 \frac{l}{2} \cos^3 \frac{l}{2},$$

$$h = \frac{n}{2} \sec^2 \frac{l}{2} \sec \theta, \quad k = \frac{2}{n} \cos^2 \frac{l}{2}.$$

Dans la *projection dite stéréographique équivalente* (Tableaux XVIII),  $n$  a été déterminé de manière que, sur la carte d'un hémisphère, la droite qui représente l'équateur ait la même longueur que la ligne des pôles, ce qui donne  $n = \sqrt{\pi}$ . Cette projection a été proposée en 1862 par M. de Prépetit-Foucaut, qui a fait une étude particulière des projections authaliques à parallèles rectilignes.

**PROJECTIONS MÉRICYLINDRIQUES À MÉRIDiens RECTILIGNES  
CONVERGENTS.**

45. Parmi ces projections, nous avons déjà étudié celles qui sont authaliques. Il y en a un autre groupe, celui des *projections dites trapéziiformes*, qui tire son origine d'une modification faite aux projections des cartes plates dès le commencement du xiv<sup>e</sup> siècle et fut très employé pendant les trois siècles suivants. Le premier méridien s'y trouve développé en vraie grandeur, et les autres interceptent sur les parallèles de la carte des longueurs proportionnelles aux différences de longitude; mais, au lieu d'être parallèles entre eux, ils vont concourir en un même point. On peut choisir ce point et l'échelle de la carte de telle manière que les longueurs se trouvent conservées sur deux parallèles désignés d'avance. Il serait facile d'établir les formules relatives à ce groupe de projections.

## PROJECTIONS MÉRICYLINDRIQUES A MÉRIDiens CIRCULAIRES.

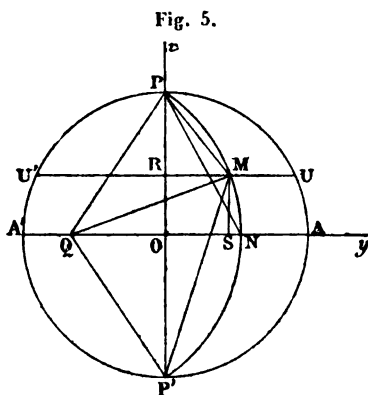
46. Si l'on astreint les méridiens de la carte à passer par deux points fixes, qui représenteront les pôles, ces projections différeront encore les unes des autres par la fonction de  $l$ , qui exprimera les distances des parallèles à l'équateur, et la fonction de  $m$ , qui donnera les distances au centre de la carte des points de rencontre de l'équateur avec les divers méridiens. Aucune de ces projections n'est authalique; nous en avons deux à considérer. La première a été proposée en 1524 par Pierre Benewitz, dit Apianus, adoptée par le célèbre navigateur vénitien Sébastien Cabot pour le tracé de sa grande Mappemonde, et très employée pendant quelques années vers le milieu du xvi<sup>e</sup> siècle. Nous achèverons de la définir en disant que le premier méridien et l'équateur y sont automécoïques. Dans la seconde projection, imaginée par Loritz en 1527, l'équateur seul est automécoïque; nous en compléterons tout à l'heure la définition.

47. *Projection d'Apianus* (Tableaux XXIX). — Nous avons dit que c'est une projection hémicylindrique dans laquelle le premier méridien et l'équateur se trouvent développés en vraie grandeur, et que les méridiens de la carte sont des portions de circonférences. D'après cela, la projection d'un hémisphère sera limitée par une circonférence  $APA'P'$  (*fig. 5*) ayant un rayon égal à  $\frac{\pi}{2}$ ; deux diamètres  $AA'$ ,  $PP'$ , perpendiculaires entre eux, figureront l'équateur et le premier méridien; la corde  $UU'$ , menée à une distance  $OR$  du centre  $O$  égale à  $l$ , sera la projection du parallèle de latitude  $l$ ; enfin, si l'on prend sur  $OA$  une longueur  $ON$  égale à  $m$ , et que par les trois points  $P$ ,  $P'$  et  $N$  on fasse passer une circonférence, l'arc

PNP' sera la projection du demi-méridien de longitude  $m$ ; le point d'intersection M de cet arc avec UU' sera celui de la carte qui répond aux deux coordonnées géographiques  $l$  et  $m$ . Son abscisse est OR ou MS, son ordonnée OS ou MR, et l'on a immédiatement

$$x = l.$$

Nous prendrons comme variable auxiliaire l'angle sous lequel le méridien PMNP' de la carte coupe le premier



méridien PP', angle que l'on pourrait appeler la *longitude modifiée* et que nous désignerons par  $m'$ ; il aurait pour côtés PP' et la tangente en P à l'arc PMNP'; or, soit Q le centre de la circonférence à laquelle appartient cet arc; si nous tirons QP et QP', nous formerons deux angles OQP, OQP' qui seront aussi égaux à  $m'$ , et, si de plus nous tirons PN, l'angle inscrit OPN, qui intercepte le même arc NP' que l'angle au centre OQP', sera égal à la moitié de  $m'$ . A cause de  $ON = m$  et de  $OP = \frac{\pi}{2}$ , on aura donc, dans le triangle OPN,

$$\text{tang } \frac{m'}{2} = \frac{2}{\pi} m.$$

La distance du centre Q du méridien PMNP' au centre O de la Carte et le rayon de ce méridien sont fournis par le triangle rectangle OPQ, qui donne

$$OQ = \frac{\pi}{2} \cot m', \quad PQ = \frac{\pi}{2} \operatorname{cosec} m'.$$

On peut d'ailleurs exprimer OQ et PQ directement en fonction de  $m$ , à l'aide des deux relations

$$PQ - OQ = m, \quad PQ + OQ = \frac{\pi^2}{4m};$$

la première se voit immédiatement sur la figure, puisque PQ est égal à QN; la seconde résulte de ce que OP est moyenne proportionnelle entre ON et l'autre segment du diamètre de la circonférence PMNP' qui a une de ses extrémités en N.

L'angle  $\theta$  est égal à l'angle en Q du triangle MQS, dont l'hypoténuse QM a la même longueur que QP, tandis que le côté MS est égal à  $l$ ; il vient donc

$$\sin \theta = \frac{2}{\pi} l \sin m'.$$

Tirons MP et MP'; le triangle MPR, à son tour, fait connaître MR ou  $y$ . En effet, le côté PR est égal à  $\frac{\pi}{2} - l$ , et l'angle RPM, qui intercepte, sur la circonférence PMNP', le même arc que l'angle MQP', est égal à la moitié de ce dernier, c'est-à-dire à  $\frac{m' + \theta}{2}$ , de sorte que l'on a

$$y = \left( \frac{\pi}{2} - l \right) \operatorname{tang} \frac{m' + \theta}{2};$$

le triangle MRP' donnerait de même

$$y = \left( \frac{\pi}{2} + l \right) \operatorname{tang} \frac{m' - \theta}{2}.$$

En projetant un arc infiniment petit de l'un des méridiens de la carte sur le parallèle de l'une de ses extrémités, on forme un triangle rectangle qui a pour hypoténuse cet arc, pour l'un des côtés de l'angle droit  $dl$ , et pour angle compris  $\theta$ ; l'hypoténuse est égale à  $\sec\theta dl$ ; on a donc

$$h = \sec\theta.$$

Quant au rapport de longueurs  $k$  sur le parallèle, il a pour expression  $\left(\frac{dy}{dm}\right) \sec l$ . Afin de l'obtenir en fonction de  $m$ , différencions par rapport à cette variable les logarithmes des deux membres de chacune des trois équations qui donnent, la première  $\tan\frac{m'}{2}$  et les deux autres  $\gamma$ ; nous aurons successivement

$$\frac{dm'}{\sin m'} = \frac{dm}{m},$$

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{\gamma} &= \frac{d(m' + \theta)}{\sin(m' + \theta)} = \frac{d(m' - \theta)}{\sin(m' - \theta)} \\ &= \frac{2 dm'}{\sin(m' + \theta) + \sin(m' - \theta)} = \frac{dm'}{\sin m' \cos \theta} = \frac{dm}{m} \sec \theta; \end{aligned}$$

il vient donc

$$\frac{d\gamma}{dm} = \frac{\gamma}{m} \sec \theta,$$

et par conséquent

$$k = \frac{\gamma}{m} \sec l \sec \theta.$$

Enfin, à cause de  $h = \sec\theta$ ,  $S$  ou  $hk \cos\theta$  se réduit à

$$S = k.$$

Afin qu'on puisse trouver facilement la vraie valeur de  $k$  qui correspond aux points pour lesquels l'expres-

sion précédente se présente sous la forme de l'indéterminé, nous écrirons encore

$$k = \frac{(\pi^2 - 4l^2) \sec l}{\pi^2 + 4m^2} \sec \theta \sec \frac{m' + \theta}{2} \sec \frac{m' - \theta}{2},$$

formule que l'on obtient en substituant à  $\gamma$ , dans  $k$ , la demi-somme des deux valeurs ci-dessus de  $\gamma$ .

En chaque point de l'équateur, les directions, les longueurs et les surfaces sont conservées.

Sur le premier méridien on a

$$\theta = 0, \quad h = 1, \quad k = \left(1 - \frac{4}{\pi^2} l^2\right) \sec l,$$

$$a = k, \quad b = 1, \quad \text{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{a};$$

sur le méridien qui limite l'hémisphère,

$$\sin \theta = \frac{2}{\pi} l, \quad h = \sec \theta, \quad k = \sec l,$$

$$a + b = \sqrt{(\sec l + 1)^2 + \text{tang}^2 \theta},$$

$$a - b = \sqrt{(\sec l - 1)^2 + \text{tang}^2 \theta};$$

enfin, au pôle,

$$\text{tang} \frac{\theta}{2} = \frac{2}{\pi} m, \quad h = \sec \theta, \quad k = \frac{4}{\pi} \sec^2 \theta \cos^2 \frac{\theta}{2};$$

les altérations convergent vers des limites différentes à mesure qu'on se rapproche de ce point en suivant les divers méridiens.

48. *Projection de Loritz* (Tableaux XXXI). — Les méridiens de la carte se construisent comme ceux de la projection d'Apianus; les parallèles sont les projections orthogonales des parallèles du globe, comme dans la projection orthographique méridienne et dans le dévelop-

pement cylindrique. La *fig. 5* convient donc encore ici, pourvu qu'on y suppose, sans autre changement, OR égal, non plus à  $l$ , mais à  $OP \sin l$ . Quant au rayon de la carte, OP ou OA, nous le prendrons égal à  $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ , afin que les aires se trouvent conservées le long de l'équateur. Si l'on raisonne comme ci-dessus, en ayant égard à ces modifications, on trouvera

$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sin l, & \text{tang } \frac{m'}{2} &= \frac{2}{\pi} m, \\
 OQ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cot m', & QP &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cosec} m', \\
 \sin \theta &= \sin l \sin m', & h &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos l \sec \theta, \\
 y &= \sqrt{2\pi} \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{l}{2} \right) \text{tang } \frac{m' + \theta}{2}, \\
 y &= \sqrt{2\pi} \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{l}{2} \right) \text{tang } \frac{m' - \theta}{2}, \\
 k &= \pi \sqrt{2\pi} \frac{\cos l \sec \theta}{\pi^2 + 4m'^2} \sec \frac{m' + \theta}{2} \sec \frac{m' - \theta}{2}, \\
 S &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} k \cos l.
 \end{aligned}$$

Le long de l'équateur, on a

$$\begin{aligned}
 \theta &= 0, & h &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & k &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \\
 a &= h, & b &= k, & S &= 1, & \sin \omega &= \frac{\pi - 2}{\pi + 2};
 \end{aligned}$$

le long du premier méridien,

$$\begin{aligned}
 \theta &= 0, & h &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos l, & k &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos l, \\
 a &= h, & b &= k, & S &= \cos^2 l, & \sin \omega &= \frac{\pi - 2}{\pi + 2};
 \end{aligned}$$

T.



enfin, sur le méridien qui limite l'hémisphère,

$$\theta = l, \quad h = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sec l, \quad S = 1,$$

$$(a + b)^2 = \frac{2}{\pi} \left[ \left( \frac{\pi}{2} + 1 \right)^2 + \tan^2 l \right],$$

$$(a - b)^2 = \frac{2}{\pi} \left[ \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right)^2 + \tan^2 l \right].$$

$$\tan \omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\left( \frac{\pi}{2} - 1 \right)^2 + \tan^2 l}.$$

PROJECTIONS MÉRICYLINDRIQUES A MÉRIDiens  
ELLIPTIQUES.

49. La projection authalique de Mollweide nous a déjà fourni un exemple de ces projections; on en trouve un second dans la projection orthographique méridienne. Le P. Fournier a proposé, en 1646, deux projections dont il n'a pas été fait d'applications connues; les méridiens y sont elliptiques; dans la première, les parallèles ont pour projections des arcs de cercle, et dans la seconde des droites; cette dernière fait donc partie de celles que nous devons examiner actuellement. Il en est de même de celle dont Arago s'est servi dans le tracé de la Mappemonde qui se trouve parmi les planches de son *Astronomie populaire*.

50. *Projection orthographique méridienne* (Tableaux XLII). — Ce n'est autre chose que la projection orthogonale ordinaire sur le plan d'un méridien. Les parallèles se trouvent donc représentés par des droites et les méridiens par des ellipses. Nous reviendrons sur ce système quand nous étudierons les projections centrales.

51. *Seconde projection du P. Fournier* (Tableaux

XXXIV). — Les parallèles de la carte sont les mêmes que dans la projection orthographique méridienne; les méridiens sont des ellipses dont le tracé s'effectue de la manière que nous avons déjà indiquée pour la projection aithalique de Mollweide, de sorte que la surface du fuseau compris entre deux méridiens quelconques ne subit pas d'altération.

Prenons le rayon de la carte égal à  $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ; nous aurons d'abord, pour l'abscisse d'un point quelconque,

$$x = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sin l.$$

Comme l'ordonnée est, avec la moitié de la corde qui figure le parallèle, dans le rapport de  $m$  à  $\frac{\pi}{2}$ , et que cette corde est égale à  $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos l$ , nous aurons aussi

$$y = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos l . m.$$

De la propriété des tangentes aux divers méridiens, en des points appartenant à un même parallèle, il résulte ici

$$\text{tang } \theta = \frac{2m}{\pi} \text{ tang } l.$$

Enfin, l'on a

$$h = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos l \sec \theta, \quad k = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad S = \cos l.$$

Ces formules donnent, pour tous les points de l'équateur,

$$\theta = 0, \quad a = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad b = \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

$$S = 1, \quad \sin \omega = \frac{\pi - 2}{\pi + 2},$$

et pour ceux du premier méridien ,

$$\theta = 0, \quad h = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos l, \quad k = \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

ici  $a$  est égal à  $h$  ou à  $k$  suivant que  $\cos l$  est plus grand ou plus petit que  $\frac{2}{\pi}$ .

On a, sur le méridien qui limite l'hémisphère,

$$\theta = l, \quad h = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad k = \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

enfin, au pôle,

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad h = \sqrt{\frac{2}{\pi}} m, \quad k = \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

ce qui donne

$$a = \sqrt{\frac{2}{\pi} (1 + m^2)}, \quad b = 0, \quad S = 0, \quad \omega = 90^\circ.$$

52. *Projection de l'Astronomie populaire d'Arago* (Tableaux XXXIII). — Ici, les parallèles sont les droites des cartes plates carrées, et les méridiens les ellipses de la seconde projection du P. Fournier ou de la projection authalique de Mollweide; les aires des fuseaux formés par les méridiens sont encore conservées.

Appelons  $l'$  la *latitude modifiée* du parallèle de latitude  $l$ , c'est-à-dire l'angle sous lequel est vu, du centre de la carte, l'arc compris entre la projection de l'équateur et celle de ce parallèle sur la circonférence qui limite la représentation d'un hémisphère; prenons le rayon de cette circonférence égal à  $\frac{\pi}{2}$ ; on trouverait immédiatement sur la figure

$$\sin l' = \frac{2}{\pi} l, \quad x = l, \quad h = \sec \theta,$$

puis, en raisonnant comme au n° 37,

$$y = m \cos l', \quad \text{tang } \theta = \frac{2}{\pi} m \text{ tang } l',$$

d'où l'on conclut

$$k = \frac{\cos l'}{\cos l} = \frac{\sqrt{\delta(\pi - \delta)}}{\sin \delta};$$

on a d'ailleurs, ici,

$$S = k.$$

Il ne se produit d'altération en aucun point de l'équateur.

Sur le premier méridien, il vient

$$\theta = 0, \quad a = k, \quad b = h = 1,$$

$$\sin \omega = \cot \frac{l + l'}{2} \cot \frac{l - l'}{2},$$

et, sur le méridien qui limite l'hémisphère,

$$\theta = l', \quad h = \sec l'.$$

---

### PROJECTIONS CENTRALES.

53. Nous avons appelé *projections coniques* les projections à méridiens rectilignes convergents et à parallèles circulaires concentriques, le centre commun des parallèles coïncidant avec le point de concours des méridiens, et ceux-ci faisant entre eux des angles proportionnels aux angles correspondants du globe. Lorsqu'il n'y a pas seulement proportionnalité, mais égalité, entre les deux séries d'angles, la projection est dite *centrale*; alors la carte d'une calotte sphérique limitée par un parallèle, en particulier celle d'un hémisphère limité par l'équateur, occupe un cercle entier; il en est de même de la carte de la totalité du globe quand le mode de projection permet de la tracer sans qu'il y ait recouvrement. C'est par les projections centrales que nous commencerons l'étude des projections coniques, et, parmi les projections centrales, nous distinguerons d'abord le groupe des *perspectives*. Pour le moment, nous ne nous occupons que de projections équatoriales ou sous l'aspect polaire, qui sont des projections directes. Les remarques qui ont été faites (n° 22) nous dispenseraient de considérer les autres; cependant nous reviendrons plus tard sur les projections centrales méridiennes, lesquelles jouent, par rapport aux premières, le rôle de projections transverses.

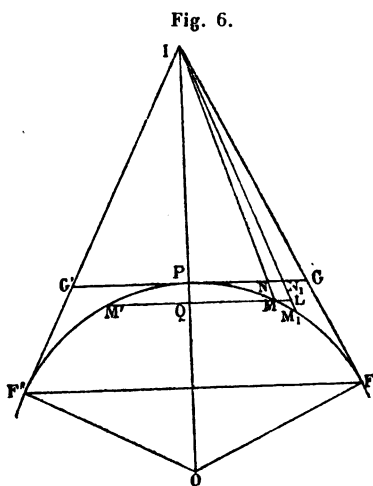
#### *Perspectives.*

54. Afin de produire le moins de déformation possible dans la représentation d'une zone terrestre par voie de perspective, on doit prendre le point de vue sur l'axe de

la zone ou sur son prolongement et choisir le plan du tableau perpendiculaire à cet axe. La distance de ce plan au centre de la sphère est d'ailleurs arbitraire, comme l'échelle de la carte; nous supposons qu'il a été mené tangent à la sphère, de telle sorte que les longueurs au centre de la carte se trouvent conservées. Puisqu'il ne s'agit que de projections directes, le point de contact est l'un des deux pôles, celui qui fait partie de la zone à représenter; pour fixer les idées, nous supposons que c'est le pôle boréal.

Examinons d'abord l'influence de la position du point de vue sur la déformation produite. Il y a à considérer trois cas : celui où ce point se trouverait sur le prolongement du rayon mené au pôle boréal; celui où il serait pris à l'intérieur de la sphère; celui où il appartiendrait au prolongement du rayon mené au pôle austral.

55. Soient O (*fig. 6*) le centre de la sphère, P le pôle



boréal, I le point de vue, placé sur le prolongement

de OP. Le plan de la figure coupe la sphère suivant un méridien FPF', et il coupe le plan du tableau suivant une droite GG', tangente en P à FPF'. Les points de contact F, F' des tangentes issues de I appartiennent au parallèle qui limite la zone dont la représentation est possible sur la carte : les perspectives des points de la sphère situés au-dessous du petit cercle FF' recouvriraient en effet celles des points qui sont situés au-dessus.

Le parallèle qui a pour trace MM', sur le plan de la figure, se projette suivant un cercle dont le rayon PN est, avec le rayon QM du parallèle lui-même, dans le rapport de IP à IQ. Le rapport de longueurs sur ce parallèle est donc

$$k = \frac{IP}{IQ}.$$

L'arc de méridien PM, qui a son origine au pôle, se trouve remplacé sur la carte par un rayon PN de la projection du parallèle, et l'accroissement infiniment petit MM<sub>1</sub> donné à cet arc a pour projection l'accroissement infiniment petit NN<sub>1</sub> du rayon, de sorte que l'on a

$$h = \frac{NN_1}{MM_1} = \frac{NN_1}{ML} \frac{ML}{MM_1} = k \frac{ML}{MM_1}.$$

Or ML est plus petit que la projection orthogonale de MM<sub>1</sub> sur QL, et à plus forte raison que MM<sub>1</sub>; donc h est plus petit que k. De plus, l'angle du méridien avec le parallèle est droit sur la carte comme sur le globe; on a donc

$$a = \frac{IP}{IQ}, \quad b = a \frac{ML}{MM_1}.$$

Les longueurs et les surfaces, qui sont conservées au centre de la carte, se trouvent réduites partout ailleurs. Or, si l'on vient à déplacer le point I, sur le prolongement de OP, en l'éloignant de P, les deux lignes IP, IQ

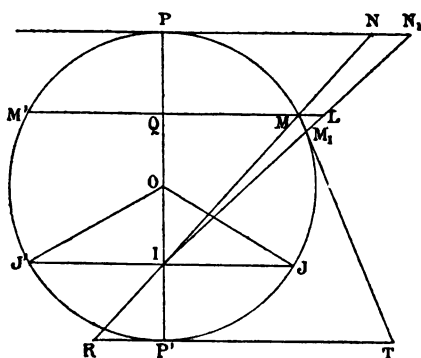
augmenteront de la même quantité, et  $a$ , tout en restant inférieur à l'unité, s'en rapprochera ;  $ML$  aussi augmentera, par conséquent  $b$ , et à plus forte raison  $S$ . Ainsi, en chaque point, la longueur qui se trouve le plus réduite le sera d'autant moins et l'élément de surface le sera aussi d'autant moins que le point de vue sera plus éloigné. Quant à la plus grande altération d'angle, elle ne dépend que du rapport

$$\frac{a}{b} = \frac{MM_1}{ML},$$

et varie dans le même sens que lui, c'est-à-dire qu'elle diminue à mesure que  $PI$  augmente. De toutes les perspectives dans lesquelles le point de vue se trouverait situé sur le prolongement de  $OP$ , la moins désavantageuse est donc celle dans laquelle il serait situé à une distance infinie, c'est-à-dire la *projection orthographique*.

56. Plaçons maintenant le point de vue en  $I$  (*fig. 7*),

Fig. 7.



au centre d'un parallèle  $JJ'$  ; conservons aux lettres  $O$ ,  $P$ ,  $Q$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $M_1$ ,  $N_1$  et  $L$  la même signification que dans



la figure précédente; soit  $P'$  le pôle austral; prolongeons l'arc élémentaire  $MM_1$ , suivant la tangente  $M_1T$  jusqu'à sa rencontre en  $T$  avec la tangente en  $P'$ , et prolongeons aussi  $MI$  jusqu'à sa rencontre en  $R$  avec la même tangente. Ici la zone que l'on pourra placer sur la carte est celle qu'engendrerait l'arc  $JMP$  tournant autour de  $PP'$ .

Il vient, comme tout à l'heure,

$$k = \frac{IP}{IQ}, \quad h = k \frac{ML}{MM_1};$$

mais cette fois  $ML$  est plus grand que  $MM_1$ , car ces deux lignes sont entre elles comme  $TR$  et  $TM_1$ , ou comme  $TR$  et  $TP'$ ; on a donc

$$b = \frac{IP}{IQ}, \quad a = b \frac{TR}{TP'}.$$

Les longueurs et les surfaces, qui sont conservées au centre de la carte, se trouvent amplifiées partout ailleurs. Or, si l'on vient à déplacer le point  $I$  sur  $PP'$  en le rapprochant de  $P'$ , les deux lignes  $IP$ ,  $IQ$  augmenteront de la même quantité, et  $b$ , tout en restant supérieur à l'unité, s'en rapprochera;  $TR$  aussi diminuera, par conséquent  $a$ , et à plus forte raison  $S$ . Ainsi, en chaque point, la longueur qui se trouve le plus amplifiée le sera d'autant moins et l'élément de surface le sera aussi d'autant moins que le point de vue sera plus près de  $P'$ . Quant à la plus grande altération d'angle, elle varie dans le même sens que le rapport

$$\frac{a}{b} = \frac{TP'}{TR},$$

et diminue en même temps que  $TP'$ . De toutes les perspectives dans lesquelles le point de vue ne se trouve pas intérieur à la sphère, la plus avantageuse est donc celle

dans laquelle il coïncide avec le point diamétralement opposé au pôle de la zone qu'il s'agit de représenter, c'est-à-dire la *projection stéréographique*. Pour cette projection on a

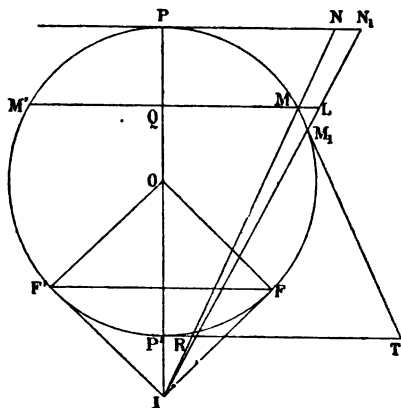
$$TP' = TR, \text{ d'où } a = b,$$

et les angles se trouvent conservés.

La *projection gnomonique*, ou perspective prise du centre de la sphère, possède évidemment la propriété de remplacer tout arc de grand cercle par une ligne droite et, par suite, mérite de fixer l'attention. Mais, sauf cette projection, il résulte de la discussion précédente que les seules perspectives à considérer sont celles pour lesquelles le point de vue se trouve en dehors de la sphère et du côté opposé au point central de la région dont on veut dresser la carte. Elles comprennent d'ailleurs, comme cas extrêmes, la projection stéréographique et la projection orthographique.

57. Soit donc I (fig. 8) la position du point de vue

Fig. 8.



sur le prolongement de  $OP'$ , à une distance  $OI$  du centre

que nous désignerons par  $D$ , le rayon terrestre  $OP$  étant pris pour unité; conservons à chaque lettre de la nouvelle figure la signification qu'elle avait sur les deux figures précédentes. La plus grande zone que l'on pourra figurer sans qu'il y ait recouvrement est celle qu'engendrerait l'arc  $FMP$  tournant autour de  $PP'$ , de sorte que la colatitude  $\delta$  reste comprise entre 0 et  $\frac{\pi}{2} + \text{arc coséc } D$ , et son cosinus entre 1 et  $-\frac{1}{D}$ . Comme ici  $TR$  est plus petit que  $TP'$ , on a

$$h < k;$$

le plus grand rapport de longueurs correspond donc au parallèle et le plus petit au méridien. Appelons  $r$  le rayon  $PN$  de la projection du parallèle de colatitude  $\delta$ ; nous aurons

$$r = \frac{(D + 1) \sin \delta}{D + \cos \delta}.$$

Le rapport de longueurs sur le parallèle est, comme on l'a vu, égal à  $\frac{IP}{IQ}$ ; sur le méridien il est  $\frac{dr}{d\delta}$ : il vient donc

$$(13) \quad a = \frac{D + 1}{D + \cos \delta},$$

$$(14) \quad b = a \frac{1 + D \cos \delta}{D + \cos \delta},$$

d'où l'on conclut, par la première des formules (1),

$$(15) \quad \sin \omega = \frac{D - 1}{D + 1} \text{ tang}^2 \frac{\delta}{2}.$$

58. *Perspective prise du centre ou projection gno-*

*monique* (Tableaux XLIV, le premier). On a, dans cette projection,

$$\begin{aligned} D &= 0: & r &= \operatorname{tang} \delta, \\ a &= \sec^2 \delta, & b &= \sec \delta, \\ S &= \sec^3 \delta, & \sin \omega &= \operatorname{tang} \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

59. *Perspective prise de la surface, ou perspective autogonale, ou projection stéréographique* (Tableau III et Tableaux XLIV, le deuxième). D'après la formule (15), l'angle  $\omega$  n'est constamment nul que pour  $D = 1$ . Il n'y a donc qu'une perspective autogonale, et les formules qui lui conviennent sont

$$\begin{aligned} D &= 1, & r &= 2 \operatorname{tang} \frac{\delta}{2}, \\ a &= \sec^2 \frac{\delta}{2}, & b &= \sec^2 \frac{\delta}{2}, \\ S &= \sec^4 \frac{\delta}{2}, & \omega &= 0. \end{aligned}$$

60. *Perspective prise de l'infini ou projection orthographique* (Tableaux XLIV, l'avant-dernier). — Il vient ici

$$\begin{aligned} D &= \infty, & r &= \sin \delta, \\ a &= 1, & b &= \cos \delta, \\ S &= \cos \delta, & \sin \omega &= \operatorname{tang}^2 \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

61.  $S$  ou  $ab$  n'est indépendant de  $\delta$  pour aucune valeur de  $D$ ; il n'y a donc pas de perspective authalique. On peut chercher quelle est celle qui est périmécoïque et celle qui est périhalique pour une zone donnée. Avant de résoudre ces questions, voyons comment, d'après les formules (13) à (15), les éléments de la déformation varient soit sur une même projection lorsqu'on passe d'un

point à un autre, soit en un même point lorsque l'on considère différentes perspectives.

On peut d'abord constater que  $a$  et  $\omega$  vont en augmentant du centre aux bords de la carte. Au pôle on a  $a = 1$ ,  $\omega = 0$ ; sur l'équateur,  $r = 1 + \frac{1}{D}$ ,  $a = 1 + \frac{1}{D}$ ,  $\sin \omega = \frac{D-1}{D+1}$ ; enfin sur les bords de la carte, en supposant que celle-ci comprenne toute la portion de la surface de la Terre qu'il est possible de représenter sans qu'il y ait recouvrement,  $\cos \delta = -\frac{1}{D}$ ,  $r = \sqrt{\frac{D+1}{D-1}}$ ,  $a = \frac{D}{D-1}$ ,  $\omega = \frac{\pi}{2}$ . On voit aussi que, la position de l'œil venant à s'écarter de plus en plus de la sphère, les rapports  $\frac{D+1}{D+\cos \delta}$ ,  $\frac{D-1}{D+1}$ , dans chacun desquels les deux termes augmentent de quantités égales, tendent à se rapprocher de l'unité, de sorte que  $a$  diminue, tandis que  $\omega$  et par conséquent  $\frac{a}{b}$  augmentent; quant à  $S$ , il diminue quand  $D$  augmente, puisqu'il est égal au produit de  $a^2$  par  $\frac{b}{a}$ . Il nous reste à examiner comment  $b$  varie soit avec  $\delta$ , soit avec  $D$ , et ensuite comment  $S$  varie avec  $\delta$ .

Au pôle on a  $b = 1$ , sur l'équateur  $b = \frac{D+1}{D^2}$ , sur le parallèle extrême  $b = 0$ . La valeur de  $b$  peut d'ailleurs s'écrire

$$b = \frac{D^2}{4(D-1)} \left[ 1 - \left( \frac{\frac{2}{D} - D + \cos \delta}{D + \cos \delta} \right)^2 \right].$$

La fraction qui se trouve élevée au carré dans la parenthèse du second membre a un dénominateur positif et ses deux termes sont du premier degré par rapport à  $\cos \delta$ ; elle

reste donc finie et varie toujours dans le même sens lorsque  $\cos \delta$  diminue de 1 à  $-\frac{1}{D}$ . Si son numérateur devient nul,  $b$ , après avoir augmenté à partir de 1, passera par un maximum, qui sera  $\frac{D^2}{4(D-1)}$ , et décroîtra ensuite jusqu'à zéro. Si ce même numérateur ne peut s'annuler,  $b$  diminuera progressivement de 1 à zéro. Le numérateur s'annulera si l'on peut avoir

$$\cos \delta = D - \frac{2}{D},$$

valeur qui, pour être admissible, doit être plus grande que  $-\frac{1}{D}$  et plus petite que 1. La première condition est toujours remplie, puisqu'on a  $D > 1$ ; quant à la seconde, elle revient à  $D < 2$ , car, si l'on faisait varier  $D$ , l'expression  $D - \frac{2}{D}$  varierait dans le même sens; or, pour  $D = 2$  elle devient égale à 1. Nous voyons donc que les perspectives dans lesquelles  $b$  passe par un maximum sont celles pour lesquelles le point de vue est à une distance de la surface de la sphère moindre que le rayon.

L'expression de  $b$  peut encore s'écrire

$$b = 1 + 2 \frac{2 \cos^2 \frac{\delta}{2} - D(D-1)}{(D + \cos \delta)^2} \sin^2 \frac{\delta}{2},$$

ce qui prouve que, sur un même parallèle,  $b$  est d'autant plus petit que  $D$  est plus grand.

Si l'on prend  $D < 2$ ,  $b$ , après avoir passé par son maximum, redeviendra égal à l'unité pour la valeur  $\Delta$  de  $\delta$ , qui est donnée par

$$\cos \frac{\Delta}{2} = \sqrt{\frac{D(D-1)}{2}}.$$

Inversement, si l'on veut que  $b$  soit égal à l'unité sur un parallèle de colatitude donnée  $\Delta$ , il faudra prendre

$$D = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{5 + 4 \cos \Delta} \right).$$

*Perspectives périmécoïques* (Tableaux LI). — Cette valeur de  $D$  en fonction de  $\Delta$  est précisément celle qui convient à la perspective périmécoïque de la zone à une base limitée par le parallèle de colatitude  $\Delta$ . En effet, on a vu que, pour une même valeur de  $\delta$ ,  $a$  diminue à mesure que  $D$  augmente ; en rapprochant le point de vue de la surface de la sphère, on augmenterait donc en chaque point la plus grande altération de longueur. Supposons au contraire que l'on choisisse une valeur plus forte de  $D$ , alors sur le parallèle de colatitude  $\Delta$  on n'aura plus  $b = 1$ , mais  $b < 1$ . Comme terme de comparaison, au lieu de prendre les longueurs qui sont conservées, on devra prendre celles qui sont le plus réduites, de sorte que la perspective ne sera périmécoïque que si, pour  $\delta = \Delta$ , le rapport  $\frac{a}{b}$  est le plus petit possible ; or on a vu que ce rapport augmente avec  $D$ .

En particulier, pour  $\Delta = \frac{\pi}{2}$ , il vient

$$D = \frac{1}{2} (\sqrt{5} + 1),$$

d'où

$$D - 1 = \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1);$$

ainsi la *perspective périmécoïque pour un hémisphère* (Tableaux XLIV, le 8<sup>e</sup> ; Tableaux XLV, le 4<sup>e</sup>) est celle dans laquelle le point de vue se trouve à une distance de la surface de l'autre hémisphère, et en dehors, égale

au côté du décagone régulier inscrit dans un grand cercle. On peut s'étonner que cette perspective ne se trouve pas parmi celles, en assez grand nombre, qui ont été proposées jusqu'à présent.

62. Occupons-nous maintenant du rapport de surfaces ; il a pour expression

$$S = (D + 1)^2 \frac{1 + D \cos \delta}{(D + \cos \delta)^3}.$$

On a au pôle  $S = 1$ , sur l'équateur  $S = \frac{(D + 1)^2}{D^3}$ , et sur le dernier parallèle susceptible d'être reproduit par la carte  $S = 0$ . Comme d'ailleurs le numérateur de la dérivée de  $S$  par rapport à  $\cos \delta$  est du premier degré en  $\cos \delta$ , ou bien  $S$  décroîtra continuellement de 1 à zéro, quand  $\cos \delta$  décroîtra de 1 à  $-\frac{1}{D}$ , ou bien  $S$  augmentera d'abord à partir de 1, passera par un *maximum*, puis diminuera jusqu'à zéro. Posons

$$\cos \delta_\mu = \frac{1}{2} \left( D - \frac{3}{D} \right), \quad S_\mu = \frac{4D^3}{27(D-1)^2};$$

l'expression de  $S$  pourra s'écrire

$$S = S_\mu \left[ 1 - \left( 1 + 2 \frac{D + \cos \delta_\mu}{D + \cos \delta} \right) \left( \frac{\cos \delta - \cos \delta_\mu}{D + \cos \delta} \right)^2 \right],$$

ce qui prouve que, pour  $\delta = \delta_\mu$ ,  $S$  passera par un maximum égal à  $S_\mu$ , dans toutes les perspectives pour lesquelles la valeur ci-dessus de  $\cos \delta_\mu$  sera admissible, c'est-à-dire comprise entre  $-\frac{1}{D}$  et 1. Cette valeur est toujours plus grande que  $-\frac{1}{D}$ , parce que  $D$  est plus grand

que 1. Comme elle augmente avec  $D$ , et devient égale à



1 lorsqu'on a  $D = 3$ , pour qu'elle ne soit pas plus grande que 1, il faut et il suffit que  $D$  ne soit pas supérieur à 3. Ainsi  $S$  passe par un maximum dans les perspectives pour lesquelles la distance du point de vue à la surface de la sphère ne surpasse pas un diamètre.

*Perspectives périhaliques* (Tableaux LII). — Dans les perspectives qui correspondent à  $D \leq 3$ , le rapport  $S$ , lorsqu'il décroît de  $S_{\mu}$  jusqu'à zéro, reprend pour une certaine valeur  $\Delta$  de  $\delta$  la valeur 1 qu'il avait au centre de la carte;  $\Delta$  est donné par

$$\cos \Delta = \frac{1}{2} \left[ (D + 1) \sqrt{4D - 3} - (3D + 1) \right].$$

Inversement, si l'on veut que  $S$  soit égal à 1 pour une certaine valeur donnée  $\Delta$  de  $\delta$ , il faudra faire choix de la perspective dans laquelle la distance du point de vue au centre est fournie par l'équation du troisième degré

$$D^3 - D^2 - (2 + 3 \cos \Delta) D - (1 + \cos \Delta + \cos^2 \Delta) = 0.$$

Cette équation a une seule racine réelle, laquelle est positive.

On obtient ainsi la perspective périhalique pour la zone à une base limitée par le parallèle de colatitude  $\Delta$ . En effet, ayant d'abord adopté pour  $D$  la valeur qui satisfait à l'équation précédente, si l'on venait à le diminuer, la valeur de  $S$  au centre de la carte resterait égale à 1, mais elle augmenterait en chacun des autres points; la plus grande altération de surface deviendrait donc plus forte.

Supposons, au contraire, que l'on prenne pour  $D$  une valeur plus grande que celle qui satisfait à l'équation; alors, en chaque point, la valeur de  $S$  diminuera; mais, comme à partir d'un certain parallèle elle deviendra moindre que l'unité, la quantité à laquelle il faudra avoir

égard sera, non plus  $S$ , mais  $\frac{S}{S'}$ ,  $S'$  désignant la plus petite valeur de  $S$ , c'est-à-dire celle que prend  $S$  sur le parallèle de colatitude  $\Delta$ . Or on a

$$\frac{S}{S'} = \frac{1 + D \cos \delta}{1 + D \cos \Delta} \left( \frac{D + \cos \Delta}{D + \cos \delta} \right)^3,$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{S}{S'} = \left( 1 + \frac{\cos \delta - \cos \Delta}{\frac{1}{D} + \cos \Delta} \right) \left( 1 - \frac{\cos \delta - \cos \Delta}{D + \cos \delta} \right)^3.$$

Chacun des deux facteurs du second membre augmente avec  $D$ ; donc il en est de même de  $\frac{S}{S'}$ , ce qui conduit à diminuer  $D$  jusqu'à ce que l'on retombe sur la racine de l'équation ci-dessus.

En particulier, la *perspective périalique pour la représentation d'un hémisphère* (Tableaux XLIV, l'avant-dernier; Tableaux XLV, le dernier) est celle dans laquelle le point de vue se trouve à une distance du centre égale à la racine réelle de l'équation

$$D^3 - D^2 - 2D - 1 = 0;$$

cette racine est à très peu près 2,148. Pour  $D = 2,148$  on a en effet, sur l'équateur,  $S = 1 - 0,00008$ . Dans cette projection, le maximum  $S_p$  est 1,1141; il se produit sur le parallèle dont la colatitude est  $67^{\circ}56'2''$ .

La projection que nous venons d'obtenir n'est pas non plus une de celles qui ont été proposées jusqu'ici. Cependant, la *troisième projection de Parent*, dans laquelle on a  $D = 2,105$ , n'en diffère pas beaucoup.

63. En y comprenant les perspectives périmécoïque

et périalique pour un hémisphère, les diverses perspectives proposées jusqu'à ce jour sont les suivantes :

Projection gnomonique;  $D = 0$ .

Projection stéréographique;  $D = 1$ .

Projection du capitaine Clarke;  $D = 1 + \frac{11}{30}$ .

Projection de sir Henri James;  $D = 1,5$ .

Première projection de Parent;  $D = 1,595$ .

Perspective périmécoïque;  $D = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$ .

Projection de Lowry;  $D = 1,69$ .

Projection de La Hire;  $D = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Deuxième projection de Parent;  $D = \sqrt{3}$ .

Troisième projection de Parent;  $D = 2,105$ .

Perspective périalique;  $D = 2,148$ .

Projection orthographique;  $D = \infty$ .

Les renseignements relatifs à ces perspectives et à quelques autres sont donnés par les Tableaux XLIV, trois des Tableaux XLV, les Tableaux LI et les Tableaux LII.

#### PROJECTIONS CENTRALES AUTRES QUE LES PERSPECTIVES.

64. D'après la définition qui a été donnée des projections centrales, les méridiens y sont représentés par des droites concourantes faisant entre elles des angles égaux aux différences de longitude, les parallèles par des circonférences ayant pour centre commun le point de concours des projections des méridiens. La loi suivant laquelle le rayon  $r$  d'un parallèle de la carte varie avec la latitude ou la colatitude distingue seule les projections centrales les unes des autres.

65. *Projection centrale autogonale.* — Ici, et dans

La recherche des projections coniques autogonales, il est commode de prendre comme variable, au lieu de  $\lambda$ , l'inverse de la quantité dont  $\lambda$  est le logarithme népérien ; posons donc, la Terre étant considérée comme un ellipsoïde de révolution,

$$\mu = \left( \frac{1 + e \cos \delta}{1 - e \cos \delta} \right)^{\frac{e}{2}} \operatorname{tang} \frac{\delta}{2},$$

ou, en négligeant les puissances de  $e$  à partir de la quatrième,

$$\mu = (1 + e^2 \cos \delta) \operatorname{tang} \frac{\delta}{2};$$

on aura, dans toute projection centrale,

$$\theta = 0, \quad h = \frac{\mu}{v} \frac{dr}{d\mu}, \quad k = \frac{r}{v}.$$

La condition pour que les angles soient conservés, savoir  $h = k$ , donnera ici

$$\frac{dr}{r} = \frac{d\mu}{\mu},$$

d'où

$$r = r_e \mu,$$

$r_e$  représentant le rayon de l'équation de la carte, que l'on peut choisir arbitrairement. La projection ainsi obtenue se confond avec la *projection stéréographique* lorsqu'on néglige l'aplatissement.

### *Projections centrales authaliques.*

66. *Projection centrale authalique de Lambert*, dite *projection de Lorgna* (Tableau X et Tableaux XLV, le premier). — Toute zone sphérique à une base étant équivalente au cercle qui a pour rayon la corde de l'arc

générateur, si l'on prend pour  $r$  la distance rectiligne du pôle à l'un quelconque des points du parallèle de colatitude  $\delta$ , les aires des zones se trouveront conservées. D'ailleurs, si des méridiens divisent chaque zone en parties égales, leurs projections diviseront aussi en parties égales chacun des anneaux circulaires qui représentent les zones sur la carte. On aura donc une projection aithalique. Les formules qui conviennent à cette projection sont

$$r = 2 \sin \frac{\delta}{2}, \quad a = \sec \frac{\delta}{2},$$

$$b = \cos \frac{\delta}{2}, \quad \text{tang} \frac{\omega}{2} = \text{tang}^2 \frac{\delta}{2}.$$

Bien que nous ayons négligé l'aplatissement, il serait facile d'en tenir compte. Appelons  $\zeta_1$  la valeur que prend  $\zeta$  pour  $l = \frac{\pi}{2}$ ; autrement dit, représentons par  $4\pi\zeta_1$  l'aire totale du globe: la portion de cette aire détachée par le parallèle de colatitude  $\delta$  sera  $2\pi(\zeta_1 - \zeta)$ . Pour que le cercle correspondant de la carte lui soit équivalent, il suffira donc de prendre

$$r = \sqrt{2(\zeta_1 - \zeta)}.$$

Si l'on décrit une circonférence ayant pour rayon le rayon équatorial, que l'on choisisse arbitrairement un point de cette circonférence, que l'on mène la corde qui se trouve à une distance de ce point égale à  $\zeta - \zeta_1$ , enfin que l'on mesure la distance rectiligne du point choisi à l'une des extrémités de la corde, on obtiendra la longueur de  $r$ . Cette longueur est aussi donnée par la formule  $r = 2 \sin \frac{\delta}{2}$ , comme dans le cas où l'on suppose la Terre sphérique, pourvu que l'on remplace  $\delta$  par l'arc que sous-tend la distance rectiligne mesurée.

67. *Projections annulaires authaliques.* — La projection qui vient d'être étudiée est la seule projection centrale authalique dans laquelle le point de concours des méridiens de la carte constitue la projection du pôle; mais il y en a une infinité d'autres dans lesquelles le pôle se trouve remplacé par une circonférence de rayon fini et que, pour cette raison, on peut qualifier d'*annulaires*. Pour abrégé, négligeons l'aplatissement; on a, dans toute projection centrale,

$$\theta = 0, \quad h = \frac{dr}{d\delta}, \quad k = \frac{r}{\sin \delta};$$

La condition de conservation des aires est donc ici

$$r dr = \sin \delta d\delta,$$

ce qui donne

$$r = \sqrt{r_p^2 + 4 \sin^2 \frac{\delta}{2}},$$

$r_p$  représentant une constante arbitraire, laquelle sera précisément le rayon de la circonférence dont nous venons de parler. Cette valeur de  $r$  conduit à une construction géométrique très simple, et il est facile de voir que l'on a  $r > \sin \delta$ , par conséquent  $k > 1$ . Il vient donc

$$a = \frac{r}{\sin \delta}, \quad b = \frac{\sin \delta}{r}.$$

La projection sera d'autant plus avantageuse que, pour une même valeur de  $\delta$ ,  $a$  et par conséquent  $r$  seront plus petits. On est ainsi conduit à prendre  $r_p = 0$ , ce qui ramène à la projection centrale authalique proprement dite.

*Projections centrales aphyllactiques.*

68. Lorsqu'on néglige l'aplatissement, les formules qui conviennent aux projections centrales sont

$$h = \frac{dr}{d\delta}, \quad k = \frac{r}{\sin \delta}.$$

Nous n'avons que deux projections centrales aphyllactiques à considérer, savoir celle de Guillaume Postel, dans laquelle les longueurs se trouvent conservées sur les méridiens, et la projection *by balance of errors* de M. Airy. Voulant éviter à la fois les trop grandes altérations d'angles et les trop grandes altérations de surfaces, M. Airy détermine  $r$  par la condition que, dans la représentation d'un hémisphère, la somme des valeurs de  $\left(\frac{a}{b} - 1\right)^2 + (ab - 1)^2$  soit un *minimum*.

69. *Projection centrale à méridiens automécoïques* ou *projection de Guillaume Postel* (Tableaux XLIII, le deuxième; Tableaux XLV, le deuxième). — On a

$$r = \delta, \quad a = \frac{\delta}{\sin \delta}, \quad b = 1,$$

$$S = a, \quad \text{tang} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2} \right) = \sqrt{a}.$$

70. *Projection compensative de M. Airy* (Tableaux XLIII, le troisième). — On a

$$r = \text{tang} \frac{\delta}{2} + 2 \cot \frac{\delta}{2} \log \sec \frac{\delta}{2},$$

les logarithmes étant pris dans le système népérien. De

cette valeur de  $r$ , on conclut

$$a + b = 1 + \sec^2 \frac{\delta}{2},$$

$$a - b = 2 \frac{\log \sec \frac{\delta}{2}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} - 1.$$

PROJECTIONS CENTRALES MÉRIDIENNES.

71. Une projection centrale transverse est une projection méridienne. L'horizon rationnel et les almicanarats  $y$  sont représentés par des circonférences concentriques dont les rayons ont, en fonction de la distance zénithale  $\eta$ , la même valeur que  $r$  en fonction de  $\delta$  dans la projection directe, de sorte que les Tableaux relatifs aux altérations dans les projections équatoriales s'appliquent aussi aux projections méridiennes, pourvu qu'en tête de la première colonne de chaque Tableau on lise  $\eta$  au lieu de  $\delta$ . Quant aux droites qui divergent du centre commun des almicanarats de la carte, elles représentent les verticaux et font entre elles les mêmes angles que ces grands cercles.

Il est naturel de considérer ici comme se correspondant à lui-même dans les deux projections le méridien du pivot, et de le prendre comme origine des longitudes et des azimuts, ce qui revient à faire  $m_0 = 0$  et  $q_0 = 0$  dans les formules (9); ces formules deviennent alors

$$(16) \quad \begin{cases} \sin p = \cos l \cos m, \\ \text{tang } q = \cot l \sin m. \end{cases}$$

Si l'on veut former les Tableaux des altérations pour des valeurs données de  $l$  et de  $m$ , on calculera d'abord les valeurs correspondantes de  $\eta$  par la première des deux



formules (16), laquelle peut s'écrire

$$\cos \gamma = \cos l \cos m;$$

puis, dans les formules qui expriment les altérations de la projection directe en fonction de  $\delta$ , on donnera successivement à  $\delta$  les valeurs de  $\gamma$  ainsi obtenues. C'est ainsi que nous avons opéré pour les projections centrales méridiennes suivantes :

Projection stéréographique (Tableaux IV) ;

Projection anthalique (Tableaux XI) ;

Projection gnomonique (Tableaux XXXVIII) ;

Projection orthographique (Tableaux XLII) ;

Projection de La Hire (Tableaux XL) ;

Perspective périmécoïque d'un hémisphère (Tableaux XXXIX) ;

Perspective périhalique d'un hémisphère (Tableaux XLI) ;

Projection de Guillaume Postel (Tableaux XXXVII).

Dans cette dernière, ce ne sont plus les méridiens qui sont automécoïques, comme dans la projection équatoriale : ce sont les verticaux.

Si dans la projection équatoriale on a  $r = f(l)$ , les coordonnées polaires d'un point quelconque de la projection méridienne seront  $f(p)$  et  $q$  ; ses coordonnées rectangulaires seront  $x = f(p) \cos q$ ,  $y = f(p) \sin q$ , l'origine se trouvant au centre de la carte et l'axe des  $x$  coïncidant avec la projection du premier méridien. On aura dans les perspectives, par exemple,

$$x = (D + 1) \frac{\cos p \cos q}{D + \sin p}, \quad y = (D + 1) \frac{\cos p \sin q}{D + \sin p}.$$

Pour obtenir  $x$  et  $y$  en fonction de  $l$  et de  $m$ , il suffit d'avoir recours aux formules (16). La première donne  $\sin p$ , qui figure dans le dénominateur commun à  $x$  et à  $y$ .

Pour avoir immédiatement les deux numérateurs, il suffit d'écrire la formule

$$\sin l = \cos p \cos q,$$

qui se déduit, par symétrie, de la première des équations (16), et la relation

$$\cos p \sin q = \cos l \sin m,$$

qui exprime que, dans le triangle sphérique ayant pour sommets le pôle, le pivot de la projection et un point quelconque de la surface terrestre, les sinus de deux côtés sont entre eux comme ceux des angles opposés. Il vient ainsi.

$$x = (D + 1) \frac{\sin l}{D + \cos l \cos m}, \quad y = (D + 1) \frac{\cos l \sin m}{D + \cos l \cos m}.$$

Dans la projection centrale authalique méridienne, les formules analogues sont

$$x = \frac{\sqrt{2} \sin l}{\sqrt{1 - \cos l \cos m}}, \quad y = \frac{\sqrt{2} \cos l \sin m}{\sqrt{1 - \cos l \cos m}}.$$

De là on déduirait facilement l'équation d'un méridien et celle d'un parallèle quelconques de la carte.

### PROJECTIONS CONIQUES.

72. Les *projections coniques* proprement dites diffèrent des projections centrales en ce que l'angle de deux méridiens rectilignes de la carte n'est plus égal à l'angle correspondant du globe; mais il conserve avec lui un rapport constant que nous désignerons par  $n$ . Chaque groupe de projections coniques est caractérisé par la formule qui donne le rayon  $r$  d'un parallèle de la carte en fonction de  $l$  ou de  $\delta$ ; dans un même groupe on obtient une infinité de projections en faisant varier  $n$ . Pour  $n > 1$ , il y aurait recouvrement dans la représentation d'une zone dont les pôles coïncideraient avec les pôles géographiques, par exemple dans la représentation d'un hémisphère limité par l'équateur et dans celle du globe entier. Pour  $n < 1$ , la Carte d'une calotte sphérique prend la forme d'un secteur circulaire. Pour  $n = 1$ , le secteur deviendrait un cercle entier, et l'on retomberait sur une projection centrale.

Dans toute projection conique, on a

$$\theta = 0, \quad h = \frac{dr}{d\delta}, \quad k = \frac{nr}{\sin \delta};$$

$a$  est d'ailleurs la plus grande et  $b$  la plus petite des deux quantités  $h$  et  $k$ .

#### *Projections coniques autogonales.*

73. Les angles seront conservés partout ailleurs qu'au pôle si l'on choisit  $r$  de manière que l'on ait  $h = k$ , ce qui donne

$$\frac{dr}{r} = n \frac{d\delta}{\sin \delta},$$

d'où

$$r = r_e \left( \operatorname{tang} \frac{\delta}{2} \right)^n,$$

$r_e$  étant une constante qui représente le rayon de l'équateur de la carte et dont la valeur ne dépend que de l'échelle adoptée. Si l'on voulait tenir compte de ce que les méridiens terrestres ne sont pas des cercles, il suffirait (n° 65) de remplacer  $\operatorname{tang} \frac{\delta}{2}$  par  $\mu$ ; ainsi, en les considérant comme elliptiques, on substituerait, à  $\operatorname{tang} \frac{\delta}{2}$ , son produit par

$$\left( \frac{1 + e \cos \delta}{1 - e \cos \delta} \right)^{\frac{e}{2}},$$

ou, sensiblement, par  $1 + e^2 \cos \delta$ .

L'expression ci-dessus de  $r$  donne

$$a = b = nr_e \frac{\left( \operatorname{tang} \frac{\delta}{2} \right)^n}{\sin \delta}.$$

74. Considérons d'abord les projections qui correspondraient à des valeurs de  $n$  plus grandes que l'unité. On peut écrire

$$a = \frac{nr_e}{2} \frac{\left( \sin \frac{\delta}{2} \right)^{n-1}}{\left( \cos \frac{\delta}{2} \right)^{n+1}},$$

ce qui prouve que  $a$  augmente constamment avec  $\delta$ ; à l'un des pôles on aurait  $\delta = 0$  et  $a = 0$ ; sur l'équateur,  $a = nr_e$ ; à l'autre pôle, qui se trouverait remplacé sur la carte par un arc de cercle,  $a$  deviendrait infini. D'après cela, si l'on faisait usage des projections qui nous

occupent pour représenter une région terrestre comprenant l'un ou l'autre pôle, ce serait seulement avec la pensée que de fortes déformations produites dans le voisinage de ces points présentent peu d'inconvénient. Appelons  $\delta_0$  soit la colatitude du parallèle le plus voisin du pôle dans la contrée dont on veut faire la carte, soit celle du parallèle à partir duquel il convient que les altérations ne dépassent pas certaines limites; c'est sur ce parallèle que  $a$  aura sa plus petite valeur; nous pouvons faire en sorte qu'elle soit égale à l'unité en choisissant convenablement l'échelle de la carte; alors, sur le parallèle de colatitude  $\delta$ , la valeur de  $a$  sera plus grande que 1; cette valeur, qui a pour expression

$$a = \frac{\sin \delta_0}{\sin \delta} \left( \frac{\operatorname{tang} \frac{\delta}{2}}{\operatorname{tang} \frac{\delta_0}{2}} \right)^n,$$

est d'autant plus considérable que  $n$  est plus grand, ce qui prouve qu'il y a avantage à diminuer  $n$  tant qu'il surpasse l'unité. Les projections dans lesquelles on aurait  $n > 1$  doivent donc être rejetées.

75. En prenant  $n = 1$ , on retrouve la *projection stéréographique équatoriale* (Tableau III). Ici les angles sont conservés même au pôle. Pour que les longueurs se trouvent aussi conservées au centre de la carte, il suffit de choisir la constante  $r_e$  égale à 2; on retombe alors sur les formules déjà obtenues

$$r = 2 \operatorname{tang} \frac{\delta}{2}, \quad a = \sec^2 \frac{\delta}{2}.$$

76. Enfin occupons-nous des projections dans les-

quelles on a  $n < 1$ . Posons

$$n = \cos \delta_0;$$

si l'on prend, par rapport à  $\delta$ , la dérivée du logarithme népérien de  $a$ , on trouve

$$\frac{da}{d\delta} = -2a \sec \delta \sin \frac{\delta + \delta_0}{2} \sin \frac{\delta_0 - \delta}{2};$$

d'après le signe de cette dérivée, on voit que  $a$ , qui serait infini au pôle, diminue à mesure que  $\delta$  augmente, jusqu'à ce que l'on ait  $\delta = \delta_0$ , et ensuite va toujours en augmentant. Supposons que l'on ait choisi  $r_e$  de manière que le minimum de  $a$  soit égal à l'unité; nous aurons, comme précédemment, sur un parallèle quelconque,

$$a = \frac{\sin \delta_0}{\sin \delta} \left( \frac{\operatorname{tang} \frac{\delta}{2}}{\operatorname{tang} \frac{\delta_0}{2}} \right)^n.$$

77. Proposons-nous de déterminer  $n$  ou  $\delta_0$  de manière que la projection soit périalique, et par conséquent aussi périmécoïque, pour une zone comprise entre deux parallèles de colatitudes  $\delta'$  et  $\delta''$ . D'abord  $\delta_0$  devra être compris entre  $\delta'$  et  $\delta''$ ; de plus, je dis qu'il faudra le choisir de manière que les valeurs de  $a$  qui correspondront à ces deux colatitudes soient égales entre elles. En effet, soit  $\delta' < \delta''$ ; le rapport de  $\operatorname{tang} \frac{\delta'}{2}$  à  $\operatorname{tang} \frac{\delta_0}{2}$  est plus petit que 1, tandis que celui de  $\operatorname{tang} \frac{\delta''}{2}$  à  $\operatorname{tang} \frac{\delta_0}{2}$  est plus grand, d'où il suit que leurs  $n^{\text{ièmes}}$  puissances varient en sens contraire quand  $n$  change de valeur. Si donc, après avoir déterminé  $n$  de manière à satisfaire à la condition qui vient d'être énoncée, on venait à le modifier, on

augmenterait l'une des valeurs de  $a$  qui répondent aux parallèles extrêmes, et l'excès de la plus grande valeur de  $a$  sur l'unité, dans toute l'étendue de la carte, ne serait plus aussi faible que possible. D'après cela, il faut prendre

$$n = \frac{\log \sin \delta'' - \log \sin \delta'}{\log \operatorname{tang} \frac{\delta''}{2} - \log \operatorname{tang} \frac{\delta'}{2}}.$$

Par exemple, s'il s'agit de la zone comprise entre l'équateur et le parallèle de  $75^\circ$  de latitude, on aura à très peu près  $n = \frac{2}{3}$ .

Les Tableaux V ainsi que les Tableaux XLVI se rapportent au groupe de projections que nous venons d'étudier.

78. La projection de Mercator est un cas particulier des projections coniques autogonales, celui où,  $nr_e$  étant pris constamment égal à l'unité, on ferait décroître  $n$  indéfiniment. En effet, le point où un parallèle quelconque de la projection conique rencontre le premier méridien a pour abscisse  $r_e - nr_e \left( \operatorname{tang} \frac{\delta}{2} \right)^n$ ; cette expression devient ici  $\frac{1}{n} \left[ 1 - \left( \operatorname{tang} \frac{\delta}{2} \right)^n \right]$ , et sa limite, pour  $n = 0$ , est  $\log \cot \frac{\delta}{2}$ .

79. On n'a jamais proposé de système de projection à méridiens rectilignes convergents et à parallèles circulaires concentriques, dans lequel les angles des méridiens de la carte ne seraient pas proportionnels aux différences de longitude. Du reste, il est facile de voir qu'un pareil système ne pourrait être ni autogonal ni authalique. En effet, deux rectangles égaux infiniment petits, situés sur le globe à la même latitude et formés chacun par deux

méridiens et deux parallèles infiniment voisins, auraient pour projections deux rectangles de hauteurs égales mais de bases différentes, par conséquent deux rectangles qui ne seraient ni semblables entre eux ni équivalents.

PROJECTIONS CONIQUES AUTHALIQUES.

80. Dans une projection conique, l'angle d'un méridien quelconque de la carte avec le premier méridien est égal à  $nm$ , tandis qu'il est égal à  $m$  dans la projection centrale authalique. Si l'on adoptait les mêmes longueurs pour les rayons des parallèles dans les deux projections, les aires varieraient de l'une à l'autre dans le rapport de 1 à  $n$ . Pour qu'on puisse les regarder comme conservées dans la projection conique sans avoir recours à un changement d'échelle, il suffira de modifier les carrés des rayons dans le rapport inverse; quel que soit  $n$ , on obtiendra donc une projection authalique si l'on prend

$$r = \frac{2}{\sqrt{n}} \sin \frac{\delta}{2}.$$

Alors  $a$  sera la plus grande et  $b$  la plus petite des deux quantités

$$h = \frac{1}{\sqrt{n}} \cos \frac{\delta}{2}, \quad k = \sqrt{n} \sec \frac{\delta}{2}.$$

Quand on voudra faire usage de l'une des projections que nous venons d'indiquer, on choisira nécessairement  $n$  plus petit que l'unité, car, si l'on avait pris d'abord  $n > 1$ , il suffirait de le diminuer pour diminuer en même temps  $\sqrt{n} \sec \frac{\delta}{2}$ , ou  $a$ , ainsi que  $\omega$ , et obtenir une projection authalique plus avantageuse. La constante  $n$  étant plus petite que l'unité, il y a un parallèle dont la



colatitude  $\delta_0$  satisfait à la condition

$$\cos \frac{\delta_0}{2} = \sqrt{n};$$

le long de ce parallèle, les altérations d'angles et de longueurs sont nulles, et, à mesure que l'on s'en écarte soit dans un sens, soit dans l'autre, ces altérations vont toujours en augmentant.

Pour  $\delta < \delta_0$ , on a

$$a = \frac{\cos \frac{\delta}{2}}{\cos \frac{\delta_0}{2}}, \quad b = \frac{\cos \frac{\delta_0}{2}}{\cos \frac{\delta}{2}}, \quad \text{tang} \frac{\omega}{2} = \text{tang} \frac{\delta_0 - \delta}{4} \text{ tang} \frac{\delta_0 + \delta}{4},$$

et, pour  $\delta > \delta_0$ ,

$$a = \frac{\cos \frac{\delta_0}{2}}{\cos \frac{\delta}{2}}, \quad b = \frac{\cos \frac{\delta}{2}}{\cos \frac{\delta_0}{2}}, \quad \text{tang} \frac{\omega}{2} = \text{tang} \frac{\delta - \delta_0}{4} \text{ tang} \frac{\delta + \delta_0}{4}.$$

### *Projections coniques aouthaliques périgonales.*

81. Soient respectivement  $\delta'$  et  $\delta''$  les colatitudes du point le plus rapproché du pôle et de celui qui en est le plus éloigné dans la contrée dont on veut faire la carte. Il est clair que  $\delta_0$  devra être compris entre  $\delta'$  et  $\delta''$ , et que les plus fortes altérations se produiront aux deux points dont nous venons de parler. En ces points les valeurs de  $a$  seront  $\sqrt{n} \sec \frac{\delta'}{2}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{n}} \cos \frac{\delta''}{2}$ , et l'on rendra la plus grande aussi faible que possible en choisissant  $n$  de manière qu'elles soient égales : on prendra donc

$$n = \cos \frac{\delta'}{2} \cos \frac{\delta''}{2}.$$

On aura alors sur les deux parallèles extrêmes

$$a = \sqrt{\frac{\cos \frac{\delta''}{2}}{\cos \frac{\delta'}{2}}}, \quad \sin \omega = \operatorname{tang} \frac{\delta'' - \delta'}{4} \operatorname{tang} \frac{\delta'' + \delta'}{4}.$$

La projection centrale n'est périgonale pour aucune région, car la condition  $n = 1$  exigerait à la fois  $\delta' = 0$  et  $\delta'' = 0$ .

Les Tableaux XLIX se rapportent à des projections qui sont périgonales pour diverses zones terrestres.

82. La *projection conique aouthalique périgonale pour un hémisphère* (Tableau XII) correspond à

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \frac{\delta_0}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

Les altérations sont nulles le long du parallèle qui a une latitude de  $65^{\circ}32'$ . La plus grande valeur de  $a$  est  $\sqrt[4]{2}$  ou 1,189; la plus petite valeur de  $b$  est l'inverse de ce nombre ou 0,841, et le rapport de la longueur la plus amplifiée à la longueur la plus réduite est  $\sqrt{2}$  ou 1,414; enfin la plus grande valeur de  $\sin \omega$  est  $\operatorname{tang}^2 \frac{\pi}{8}$ , ce qui correspond pour  $\omega$  à  $9^{\circ}53'$  et pour  $2\omega$  à  $19^{\circ}45'$ .

Pour la représentation du globe entier au moyen de deux cartes, ce ne sont pas des projections équatoriales qu'il convient d'adopter, mais des projections méridiennes, afin de ne pas séparer l'une de l'autre les deux portions de l'Afrique ni les deux portions de l'Amérique qui sont au nord et au sud de l'équateur. Sur les map-mondes on place habituellement aux centres des deux cartes les points de l'équateur qui se trouvent l'un à  $70^{\circ}$  de longitude orientale comptée à partir du méridien de

Paris, l'autre à  $110^{\circ}$  de longitude occidentale. Nous conservons ici la même disposition ; seulement, chaque carte, au lieu d'occuper un cercle entier, se réduit à un secteur de  $255^{\circ}$  environ. Sur chacune, le quadrant qui aboutit au pôle austral fournit une ligne de séparation convenable ; car, pour l'une, il se dirige dans l'océan Indien, et, pour l'autre, dans l'océan Pacifique. Les deux quarts d'équateur ne sont plus dans le prolongement l'un de l'autre, et font entre eux un angle d'un peu plus de  $127^{\circ}$  ; mais à cela il y a peu d'inconvénient, puisque la brisure s'effectue en des points éloignés des continents. On peut d'ailleurs utiliser le secteur de  $105^{\circ}$  qui est resté vide, en y représentant de nouveau, mais cette fois réunies, les parties qui ont été séparées, ou bien encore en prolongeant de chaque côté la carte déjà construite pour y ajouter celle d'un demi-fuseau de  $60^{\circ}$  à  $70^{\circ}$ , lequel se trouverait ainsi figuré deux fois sur la carte totale. Par ce moyen, on rétablirait la disposition mutuelle de quelques petites îles entre lesquelles passe la ligne de séparation.

La projection que nous venons d'indiquer ne produit aucune déformation à  $65^{\circ}$  et demi de distance du point central ; de sorte qu'il y a, dans l'hémisphère oriental, un cercle traversant l'Afrique, l'Europe, l'Asie et l'Australie, tout le long duquel les altérations sont nulles ; le cercle de l'hémisphère occidental qui possède la même propriété traverse les deux Amériques. Ainsi, non seulement les altérations ne sont jamais considérables, mais le nombre des points importants où elles atteignent leurs plus grandes valeurs est très restreint. Enfin, le mode de projection se prête à des constructions géométriques qui permettent de déterminer ces altérations en chaque point et d'en corriger les angles ainsi que les longueurs. Elles sont les mêmes à des distances égales du centre. En joignant

au centre un point quelconque de la carte par une ligne droite, on obtient l'une des deux directions qui, partant de ce point, se coupent à angle droit sur la carte comme sur le globe; les déviations, comptées à partir de l'une ou l'autre, n'atteignent jamais  $10^\circ$ . C'est aussi sur ces deux directions que se mesurent la longueur la plus amplifiée et la longueur la plus réduite, lesquelles, dans les cas les plus défavorables, ne diffèrent de la longueur vraie que de sa cinquième partie.

Au lieu de  $n = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0,707$ , on peut prendre, en nombre rond,  $n = 0,75 = \frac{3}{4}$ , ce qui rend la construction plus commode. L'angle du secteur qui reste vide sur la carte ne sera plus que de  $90^\circ$  au lieu de  $105^\circ$ , et les deux portions de l'équateur de la carte feront entre elles un angle un peu plus obtus. La circonférence lieu des points d'altérations nulles ne sera plus qu'à  $60^\circ$  du point central et traversera les terres plus près de leurs régions moyennes. Les altérations se trouveront un peu augmentées sur les bords de la carte, mais elles seront diminuées vers le centre, c'est-à-dire dans la région où elles varient le plus lentement. Au centre de la carte on aura

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,155, \quad a^2 = \frac{4}{3} = 1,333,$$

$$\sin \omega = \frac{1}{7}, \quad 2\omega = 16^\circ 26',$$

et sur les bords

$$a = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1,225, \quad a^2 = \frac{3}{2} = 1,500'$$

$$\sin \omega = \frac{1}{5}, \quad 2\omega = 23^\circ 4'.$$

83. Outre les Mappemondes, on construit souvent des Planisphères donnant, à l'aide d'une seule carte, la représentation du globe entier. Si l'on voulait conserver les surfaces, il faudrait avoir recours à la projection conique authalique, qui est périgonale pour la zone comprise entre le pôle nord et le parallèle de  $50^\circ$  de latitude australe, les déformations ne présentant plus d'inconvénient au-dessous de ce parallèle, qui passe près de la pointe sud de l'Amérique. On placerait le pôle boréal au centre de la carte, et l'on effectuerait la séparation suivant le méridien de  $170^\circ$  de longitude à l'ouest de Paris, lequel traverse le détroit de Behring et ne rencontre aucune terre. Cette projection correspond à  $n = 342$ ; elle ne produit pas de déformation le long du parallèle de  $18^\circ 25'$  de latitude sud; les plus grandes valeurs de  $2\omega$ ,  $a$  et  $(a)$  y sont respectivement  $58^\circ 43'$ , 1,710 et 2,924, tandis qu'elles seraient, avec la projection centrale de Lambert,  $104^\circ 28'$ , 2,924 et 8,549.

PROJECTIONS TRONCONIQUES AUTHALIQUES OU PROJECTIONS  
D'ALBERS.

84. Pour que les aires soient conservées dans une projection conique, il faut qu'on ait

$$rdr = \frac{1}{n} \sin \delta d\delta;$$

en intégrant cette équation et en prenant la constante nulle, on retomberait sur les projections précédentes, dans lesquelles le point de concours des méridiens de la carte est la projection du pôle. Pour toute autre valeur de la constante, ce point se trouve remplacé par un arc de circonférence, et l'on a, en désignant par  $r_p$  le rayon de

cette circonférence,

$$r = \sqrt{r_p^2 + \frac{4}{n} \sin^2 \frac{\delta}{2}},$$

d'où l'on conclut

$$h = \frac{\sin \delta}{\sqrt{n \left( nr_p^2 + 4 \sin^2 \frac{\delta}{2} \right)}}, \quad k = \frac{1}{\sin \delta} \sqrt{n \left( nr_p^2 + 4 \sin^2 \frac{\delta}{2} \right)}.$$

L'expression de  $k^2$  peut s'écrire

$$k^2 = 1 + [n(r_p + 1) - 1] \sec^2 \frac{\delta}{2} + \left( \frac{nr_p - 2 \sin^2 \frac{\delta}{2}}{\sin \delta} \right)^2,$$

qui prouve que pour  $n > 1$ , et même pour  $n > \frac{1}{r_p + 1}$ , on a  $k > 1$ , par conséquent,  $a = k$ . Or, supposons que l'on ait d'abord adopté une valeur de  $n$  et une valeur de  $r_p$ , et que pour ces valeurs on ait  $n < \frac{1}{r_p + 1}$ ; d'après la première expression

$$k = \frac{1}{\sin \delta} \sqrt{n \left( nr_p^2 + 4 \sin^2 \frac{\delta}{2} \right)},$$

il est clair qu'en diminuant ou  $n$  ou  $r_p$ , ou tous les deux, on diminuera  $k$  et par conséquent  $a$ , et on obtiendra une projection plus avantageuse. Nous ne devons donc faire un choix que parmi celles pour lesquelles on a

$$n(r_p + 1) < 1.$$

Si l'on égale à l'unité le rapport  $k$ , on trouve, pour les colatitudes  $\delta_0$  et  $\delta_1$  des deux parallèles en chaque point desquels il n'y a pas d'altération,

$$\cos \delta_0 = n + \sqrt{(1 - n)^2 - n^2 r_p^2},$$

$$\cos \delta_1 = n - \sqrt{(1 - n)^2 - n^2 r_p^2},$$

ce qui donne pour  $\delta_0$  et  $\delta_1$  des valeurs réelles, puisqu'on a, par hypothèse,  $n(r_p + 1) < 1$  ou  $nr_p < 1 - n$ .

Inversement, si l'on se donnait d'abord  $\delta_0$  et  $\delta_1$ , on aurait

$$n = \frac{1}{2} (\cos \delta_0 + \cos \delta_1) = \cos \frac{\delta_1 - \delta_0}{2} \cos \frac{\delta_1 + \delta_0}{2},$$

$$r_p = \frac{2}{n} \sin \frac{\delta_0}{2} \sin \frac{\delta_1}{2},$$

d'où l'on conclut

$$k^2 = 1 + \frac{(\cos \delta - \cos \delta_0)(\cos \delta - \cos \delta_1)}{\sin^2 \delta},$$

ou bien encore

$$k^2 = 1 + \frac{\cos \delta_0 - \cos \delta}{1 + \cos \delta} \left[ \cos \delta_1 - (1 - \cos \delta_1) \frac{\cos \delta}{1 - \cos \delta} \right],$$

et aussi

$$h^2 = \left[ 1 - \frac{\left( \operatorname{tang} \frac{\delta_0}{2} \operatorname{tang} \frac{\delta_1}{2} - \operatorname{tang}^2 \frac{\delta}{2} \right)^2}{\operatorname{tang}^2 \frac{\delta_0}{2} \operatorname{tang}^2 \frac{\delta_1}{2} + \operatorname{tang}^2 \frac{\delta}{2}} \cos^2 \frac{\delta}{2} \right] \operatorname{sec}^2 \frac{\delta_1 - \delta_0}{2}.$$

La première expression de  $k^2$  prouve que pour  $\delta < \delta_0$  et pour  $\delta > \delta_1$ , on a  $k > 1$ , et par conséquent  $a = k$ , tandis que pour  $\delta_0 < \delta < \delta_1$ , on a  $k < 1$ , et par conséquent  $a = h$ . Elle prouve aussi que  $a$  diminue quand  $\delta$  augmente de 0 à  $\delta_0$ . La seconde expression de  $k$  montre que  $a$  augmente quand  $\delta$  augmente de  $\delta_1$  à  $\pi$ . Enfin, de l'expression de  $h$  il résulte que,  $\delta$  augmentant de  $\delta_0$  à  $\delta_1$ ,  $a$  passe par un *maximum* pour  $\delta = \delta_\mu$ ,  $\delta_\mu$  étant donné par

$$\operatorname{tang} \frac{\delta_\mu}{2} = \sqrt{\operatorname{tang} \frac{\delta_0}{2} \operatorname{tang} \frac{\delta_1}{2}},$$

ou, ce qui revient au même, par

$$\cos \delta_\mu = \cos \frac{\delta_1 + \delta_0}{2} \operatorname{sec} \frac{\delta_1 - \delta_0}{2};$$

ce maximum est

$$H = \sec \frac{\delta_1 - \delta_0}{2}.$$

Inversement, on conclut de là

$$\cos \frac{\delta_1 - \delta_0}{2} = \frac{1}{H}, \quad \cos \frac{\delta_1 + \delta_0}{2} = nH,$$

$$\cos \delta_u = nH^2, \quad r_p = \frac{2}{nH} \sin^2 \frac{\delta_p}{2}.$$

L'équation qui permettrait de calculer  $\delta$  en fonction de  $k$  est

$$\cos^2 \delta - \frac{2n}{k^2} \cos \delta + \frac{n(nr_p^2 + 2)}{k^2} - 1 = 0.$$

Entre les colatitudes  $\delta'$ ,  $\delta''$  des deux parallèles en chaque point desquels le rapport de longueurs sur le méridien atteint une valeur donnée  $k$ , on a donc les relations

$$\cos \delta' + \cos \delta'' = \frac{2n}{k^2},$$

$$\cos \delta' \cos \delta'' = \frac{n(nr_p^2 + 2)}{k^2} - 1,$$

lesquelles prouvent que les deux quantités

$$k^2 (\cos \delta' + \cos \delta''), \quad k^2 (1 + \cos \delta' \cos \delta'')$$

sont constantes. Ces deux quantités peuvent s'écrire

$$k^2 \cos \frac{\delta'' - \delta'}{2} \cos \frac{\delta'' + \delta'}{2}, \quad k^2 \left( \cos^2 \frac{\delta'' - \delta'}{2} + \cos^2 \frac{\delta'' + \delta'}{2} \right),$$

d'où nous concluons que

$$k \cos \frac{\delta'' - \delta'}{2}, \quad k \cos \frac{\delta'' + \delta'}{2}$$

sont aussi constants. En particulier, pour  $\delta = \delta_0$  on a



$k = 1$  ainsi que pour  $\delta = \delta_1$ ; il vient donc

$$k \cos \frac{\delta'' - \delta'}{2} = \cos \frac{\delta_1 - \delta_0}{2}, \quad k \cos \frac{\delta'' + \delta'}{2} = \cos \frac{\delta_1 + \delta_0}{2},$$

ou bien encore

$$H k \cos \frac{\delta'' - \delta'}{2} = 1, \quad k \cos \frac{\delta'' + \delta'}{2} = n H.$$

85. Cela posé, imaginons qu'il s'agisse de trouver la projection qui est périgonale pour la zone limitée par les deux parallèles de colatitudes  $\delta'$ ,  $\delta''$ . Il faudra faire en sorte que, sur ces deux parallèles,  $a$  ou  $k$  ait la même valeur, de sorte que les deux dernières équations leur seront applicables; il faudra de plus que la valeur commune de  $a$  ou  $k$  soit égale au maximum  $H$ , par lequel passe  $a$  entre les deux parallèles de colatitudes  $\delta_0$ ,  $\delta_1$ ; on aura donc à substituer, dans les deux équations,  $H$  à  $k$ , ce qui donne

$$H = \sqrt{\sec \frac{\delta - \delta'}{2}}, \quad n = \cos \frac{\delta' + \delta''}{2}.$$

$H$  et  $n$  ayant été calculés, on en déduira  $\delta_0$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_\mu$  et  $r_p$  par les formules que nous avons données plus haut. De l'expression de  $H$  il résulte, pour la moitié  $\Omega$  de la plus grande altération d'angle dans toute l'étendue de la carte,

$$\sin \Omega = \operatorname{tang}^2 \frac{\delta'' - \delta'}{4}.$$

Les distances polaires  $\delta$ ,  $\delta_0$ ,  $\delta'$ , . . . doivent être comptées à partir de celui des deux pôles pour lequel on a  $\delta' + \delta'' < \pi$ , afin que  $n$  soit toujours positif.

86. Si les deux parallèles extrêmes se trouvaient également éloignés de l'équateur, on aurait  $n = 0$ , et l'on retomberait sur la projection cylindrique authalique qui

est périgonale pour la zone limitée par l'équateur et le parallèle de colatitude  $\delta'$  ou de latitude  $l'$ . En effet, si nous posons

$$n' = \sin \delta_0 = \cos l_0$$

et que nous faisons, dans les formules ci-dessus,

$$\delta' = \frac{\pi}{2} - l', \quad \delta'' = \frac{\pi}{2} + l',$$

il viendra

$$n = 0, \quad H = \sqrt{\sec l'}, \quad r_p = \infty,$$

$$\delta_1 = \pi - \delta_0, \quad \cos l_0 = \sqrt{\cos l'},$$

$$\delta_\mu = \frac{\pi}{2}, \quad nr_p = n'.$$

Les méridiens, ainsi que les parallèles de la carte, deviennent des droites, et l'abscisse d'un point quelconque est la limite vers laquelle tend la différence

$$\sqrt{r_p^2 + \frac{2}{n}} - \sqrt{r_p^2 + \frac{4}{n} \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

entre le rayon de l'équateur et celui d'un parallèle quelconque lorsque  $n$  tend vers zéro,  $nr_p$  restant constamment égal à  $n'$ . Or cette différence peut s'écrire

$$\frac{2 \cos \delta}{\sqrt{n^2 r_p^2 + 2n} + \sqrt{n^2 r_p^2 + 4n \sin^2 \frac{\delta}{2}}}$$

ou

$$\frac{2 \sin l}{\sqrt{n'^2 + 2n} + \sqrt{n'^2 + 4n \sin^2 \frac{\delta}{2}}};$$

si donc on fait  $n = 0$ , on aura

$$x = \frac{1}{n'} \sin l.$$

Quant à l'ordonnée de la projection du point de l'équateur qui a pour longitude  $m$ , ce sera la limite vers laquelle tend la longueur  $nm\sqrt{r_p^2 + \frac{2}{n}}$  ou  $m\sqrt{n^2 r_p^2 + 2n}$ ; on aura donc

$$y = n' m.$$

Ces expressions sont bien celles que nous avons trouvées pour les coordonnées d'un point quelconque dans les projections cylindriques authaliques.

87. Nous avons été conduits à rejeter les projections dans lesquelles  $n(r_p + 1)$  surpasse l'unité. Pour  $n(r_p + 1) = 1$ , il vient  $\delta_1 = \delta_0$ , et, par conséquent,  $\delta'' = \delta'$ , de sorte que la projection correspondante n'est périgonale pour aucune région. Dans cette projection, on aurait

$$a^2 = 1 + \left( \frac{\cos \delta - n}{\sin \delta} \right)^2.$$

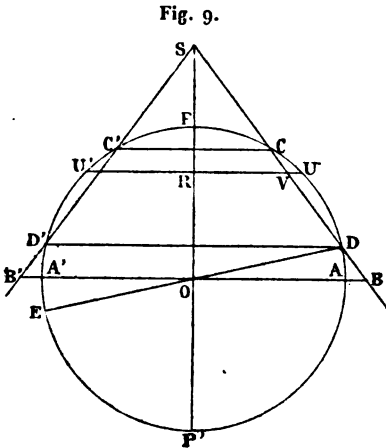
88. Lorsque la zone terrestre que l'on considère n'a qu'une base, c'est-à-dire lorsque  $\delta'$  est nul,  $nH^2$  est égal à l'unité, de sorte qu'il vient  $\delta_p = 0$  et  $r_p = 0$ . On retombe ainsi sur la projection conique authalique qui correspond à la même zone.

89. Quelle que soit la zone considérée, la valeur de  $H$  ne dépend que de la distance sphérique  $\delta'' - \delta'$  des deux parallèles extrêmes et peut être fournie par une table à simple entrée. Cette valeur est la même que celle qui se produirait dans la projection périgonale de la calotte sphérique que détermine le parallèle de colatitude  $\delta'' - \delta'$ ; nous venons de voir que cette dernière est une projection conique : donc les plus grandes altérations auxquelles donne lieu la projection tronconique authalique qui est périgonale pour la zone à deux bases limitée

par les parallèles de colatitudes  $\delta'$  et  $\delta''$  sont égales à celles de la projection conique authalique qui est péripogonale pour la calotte sphérique limitée par le parallèle de colatitude  $\delta'' - \delta'$ .

#### DÉVELOPPEMENTS CONIQUES.

90. Dans ces projections, on substitue à la surface du globe celle d'un cône de révolution ayant son axe sur la ligne des pôles, puis, aux méridiens et aux parallèles terrestres, les traces de leurs plans sur la surface du cône. La carte n'est autre chose que le développement



de la surface du cône, de sorte que les méridiens y sont projetés sur des droites concourantes et les parallèles sur des circonférences ayant pour centre commun le point de rencontre de ces droites. Le pôle lui-même est remplacé par un arc de circonférence, à moins que le sommet du cône ne coïncide avec lui. Soit  $PP'$  (*fig. 9*) la ligne des pôles; menons par cette ligne un plan per-

pendiculaire à celui du premier méridien, et figurons les traces de ce plan sur la surface terrestre, sur celle du cône et sur le plan du parallèle de colatitude  $\delta$  : la première sera la circonférence  $APA'P'$  ; la deuxième se composera de deux droites  $SB, S'B'$  ; enfin la troisième sera une perpendiculaire  $UU'$  à  $PP'$ . Soient  $O$  le centre de la circonférence,  $R, V$  les points de rencontre de  $UU'$  avec  $PP'$  et avec  $SB$ . Désignons par  $\alpha$  le demi-angle au sommet du cône, c'est-à-dire l'angle  $OSB$ , par  $\Sigma$  la distance  $OS$  du sommet au centre du globe, le rayon terrestre étant pris pour unité, par  $r$  le rayon  $SV$  de la circonférence sur laquelle se fera la projection du parallèle considéré, enfin par  $m'$  l'angle de la projection du méridien de longitude  $m$  avec celle du premier méridien. Les deux angles  $m'$  et  $m$  sont entre eux dans le rapport de  $RV$  à  $SV$  ou dans celui de  $\sin \alpha$  à 1, ce qui donne

$$m' = m \sin \alpha.$$

On a de plus, sur la figure,

$$SV = RS \sec \alpha, \quad RS = OS - OR, \quad OR = \cos \delta;$$

il vient donc

$$r = (\Sigma - \cos \delta) \sec \alpha.$$

On conclut de là que  $a$  est la plus grande et  $b$  la plus petite des deux quantités

$$h = \frac{\sin \delta}{\cos \alpha}, \quad k = \frac{\Sigma - \cos \delta}{\sin \delta} \tan \alpha.$$

Supposons que le cône coupe la sphère ; appelons  $\delta_1, \delta_2$  les colatitudes des parallèles communs aux deux surfaces ;  $C$  et  $D$  étant les points de rencontre de  $SB$  avec la demi-circonférence  $PAP'$ ,  $C'$  et  $D'$  ceux de  $SB'$  avec l'autre demi-circonférence et  $E$  le point diamétralement opposé

à **D**, les arcs **PC**, **PC'** mesureront l'angle  $\delta_1$ , et les arcs **PD**, **PD'** l'angle  $\delta_2$ , d'où il est facile de conclure que les angles inscrits **SDD'**, **SDE** sont respectivement égaux à  $\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}$ ,  $\frac{\pi}{2} - \frac{\delta_2 - \delta_1}{2}$ ; or le premier est le complément de l'angle au sommet du cône, de sorte que l'on a

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\delta_1 + \delta_2}{2},$$

et le second est l'angle en **D** du triangle **OSD**, lequel donne

$$\frac{OS}{OD} = \frac{\sin SDE}{\sin OSD};$$

il vient donc

$$\Sigma = \frac{\cos \frac{\delta_2 - \delta_1}{2}}{\cos \frac{\delta_2 + \delta_1}{2}}.$$

Substituant ces expressions de  $\alpha$  et de  $\Sigma$  dans celles de  $h$  et de  $k$ , on trouve

$$h = \frac{\sin \delta}{\sin \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}}, \quad k = \frac{\cos \frac{\delta_2 - \delta_1}{2} - \cos \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \cos \delta}{\sin \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \sin \delta}.$$

En particulier, si le cône est tangent à la sphère le long du parallèle de colatitude  $\delta_1$ , on aura

$$h = \frac{\sin \delta}{\sin \delta_1}, \quad k = \frac{1 - \cos \delta_1 \cos \delta}{\sin \delta_1 \sin \delta}.$$

Les Tableaux XXIV se rapportent à quatre développements coniques dans chacun desquels l'angle au sommet du cône est droit. Le premier a pour sommet le pôle et pour base l'équateur; le second admet comme sections les

parallèles de  $22^{\circ}30'$  et de  $67^{\circ}30'$  de latitude, le troisième ceux de  $15^{\circ}$  et de  $75^{\circ}$ ; le quatrième est circonscrit au globe le long du parallèle de  $45^{\circ}$ . La valeur de  $n'$  qui figure en tête de chaque Tableau indique le rapport à  $\frac{\pi}{4}$  de la latitude du parallèle le plus voisin de l'équateur qui est commun au cône et à la surface terrestre.

91. *Première projection de Murdoch.* — Des trois projections proposées par Murdoch vers 1760, la première est une projection tronconique dans laquelle les distances mutuelles des parallèles, mesurées sur la sphère par des arcs de grand cercle, se trouvent conservées. On a donc, en appelant  $r_p$  le rayon de la circonférence par un arc de laquelle le pôle se trouve remplacé,

$$r = r_p + \delta, \quad m' = nm,$$

d'où l'on conclut

$$h = 1, \quad k = \frac{n(r_p + \delta)}{\sin \delta}.$$

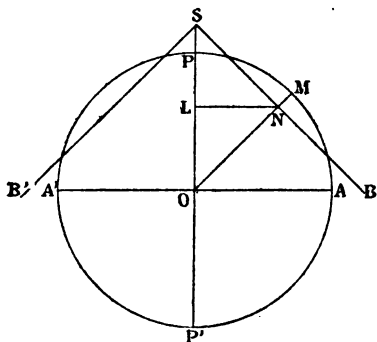
Pour déterminer le paramètre  $n$ , Murdoch imagine un cône homothétique à celui qui se trouverait circonscrit au globe suivant le parallèle à latitude moyenne dans la contrée que l'on veut représenter, et il adopte comme méridiens de la carte ceux que fournirait le développement de ce cône. Si l'on désigne par  $\alpha$  le demi-angle au sommet, par  $\delta'$  et  $\delta''$  les colatitudes des deux parallèles extrêmes, on aura

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\delta' + \delta''}{2}, \quad n = \sin \alpha = \cos \frac{\delta' + \delta''}{2}.$$

Il reste à déterminer  $r_p$ . Murdoch prend comme projection du parallèle moyen le développement de la per-

spective de ce parallèle sur le cône considéré, le point de vue étant au centre du globe, et il pose la condition que l'aire totale de la zone comprise entre les deux parallèles de colatitudes  $\delta'$ ,  $\delta''$  soit conservée, ce qui détermine aussi la position du cône. Soient O (fig. 10) le centre de la Terre, P, P' les deux pôles, S le sommet du cône, M un point quelconque du parallèle moyen, SB, SB' les deux génératrices du cône qui se trouvent dans le plan du mé-

Fig. 10.



ridien de M, N le point de rencontre de OM avec SB, enfin L le pied de la perpendiculaire abaissée de N sur PP'. La carte occupe tout l'intérieur d'un trapèze circulaire dont la hauteur est égale à  $\delta'' - \delta'$ , et la demi-somme des bases à la circonférence de rayon LN; l'aire totale est donc  $2\pi(\delta'' - \delta') \times LN$ . Celle de la zone est  $2\pi(\cos \delta' - \cos \delta'')$  ou  $4\pi \sin \frac{\delta'' - \delta'}{2} \sin \frac{\delta'' + \delta'}{2}$ , le rayon terrestre étant pris pour unité. Pour que les deux surfaces soient équivalentes, il faut donc que l'on ait

$$LN = \frac{\sin \frac{\delta'' - \delta'}{2}}{\frac{\delta'' - \delta'}{2}} \sin \frac{\delta'' + \delta'}{2}.$$



Comme LN est égal à SN sin  $\alpha$ , on conclut de là, pour le rayon de la projection du parallèle moyen,

$$SN = \frac{\sin \frac{\delta'' - \delta'}{2}}{\frac{\delta'' - \delta'}{2}} \operatorname{tang} \frac{\delta' + \delta''}{2}.$$

Telle est la valeur que doit prendre  $r$  pour  $\delta = \frac{\delta' + \delta''}{2}$ ; on a donc

$$r_p = \frac{\sin \frac{\delta'' - \delta'}{2}}{\frac{\delta'' - \delta'}{2}} \operatorname{tang} \frac{\delta' + \delta''}{2} - \frac{\delta' + \delta''}{2},$$

et le second paramètre est connu.

Pour déterminer le cône, on peut calculer la distance OS du sommet au centre, ou bien encore la normale ON menée du centre à la surface. On a

$$OS = \frac{\sin \frac{\delta'' - \delta'}{2}}{\frac{\delta'' - \delta'}{2}} \sec \frac{\delta' + \delta''}{2}, \quad ON = \frac{\sin \frac{\delta'' - \delta'}{2}}{\frac{\delta'' - \delta'}{2}}.$$

Cette dernière valeur est plus petite que l'unité, ce qui prouve que le cône coupe la sphère, ainsi qu'on devait s'y attendre.

La seconde projection de Murdoch appartient au groupe des développements de perspectives épiconiques dont nous parlerons bientôt.

92. *Troisième projection de Murdoch.* — Quant à la troisième, elle diffère de la première en ceci seulement que la position du sommet du cône sur lequel on prend

les perspectives des méridiens et du parallèle moyen est déterminée par la condition que le rapport de ON à OM ait la même valeur que celui qui existe entre la moitié de l'arc de méridien compris entre les deux parallèles extrêmes et la tangente de l'angle au centre correspondant à ce demi-arc; cette condition donne

$$\text{ON} = \frac{\frac{\delta'' - \delta'}{2}}{\text{tang} \frac{\delta'' - \delta'}{2}}, \quad \text{SN} = \frac{\frac{\delta'' - \delta'}{2}}{\text{tang} \frac{\delta'' - \delta'}{2}} \text{tang} \frac{\delta' + \delta''}{2},$$

$$r_p = \left( \frac{\delta'' - \delta'}{2} \text{tang} \frac{\delta' + \delta''}{2} - \frac{\delta' + \delta''}{2} \text{tang} \frac{\delta'' - \delta'}{2} \right) \cot \frac{\delta'' - \delta'}{2}.$$

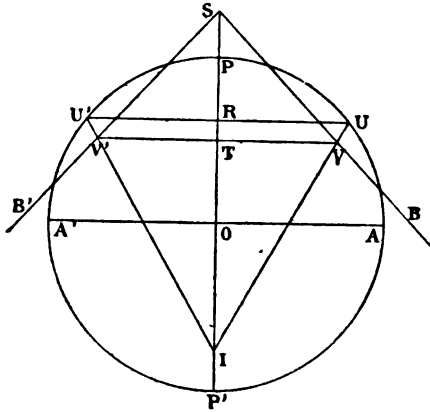
#### DÉVELOPPEMENTS DE PERSPECTIVES ÉPICONIQUES.

93. Pour construire une de ces projections, on prend les perspectives des divers points de la surface terrestre sur un cône de révolution dont l'axe passe par les deux pôles, le point de vue étant situé sur cet axe, on développe ensuite la surface du cône. Comme le pôle a sa perspective au sommet, sa projection coïncide avec le point de concours des méridiens rectilignes de la carte, lequel sert de centre commun aux projections des parallèles; on a donc bien une projection conique.

Soient O (*fig. 11*) le centre de la sphère, P et P' les deux pôles, S le sommet du cône, I le point de vue. Le plan du méridien perpendiculaire à celui à partir duquel on compte les longitudes coupe la sphère suivant un grand cercle APA'P', le cône suivant deux génératrices SB, SB', l'équateur suivant un diamètre AA' de la sphère, enfin le parallèle de colatitude  $\delta$  suivant un diamètre UU' de ce petit cercle; plaçons la lettre R au milieu de ce diamètre, les lettres V, V' aux points de rencontre des

rayons visuels  $IU, IU'$  avec les génératrices  $SB, SB'$ , et la lettre  $T$  au milieu de  $VV'$ . Le rayon de la projection du parallèle considéré sera  $SV$ ; désignons-le par  $r$ . Appe-

Fig. 11.



lons respectivement  $D$  et  $\Sigma$  les distances  $OI$  et  $OS$  du centre de la sphère au point de vue et au sommet du cône, enfin  $\alpha$  le demi-angle au sommet  $OSB$ .

Le triangle  $STV$  donne

$$ST = r \cos \alpha,$$

et les triangles semblables  $ITV, IRU$

$$IT = \frac{TV \times IR}{RU}$$

ou

$$IT = \frac{r \sin \alpha (D + \cos \delta)}{\sin \delta};$$

ajoutant cette expression de  $IT$  avec celle de  $ST$ , et écrivant que la somme est égale à  $D + \Sigma$ , on obtient une

relation entre  $r$  et  $\delta$ , de laquelle on tire

$$r = \frac{(D + \Sigma) \sin \delta}{D \sin \alpha + \sin(\alpha + \delta)}.$$

Comme d'ailleurs le rapport de TV à SV est égal à  $\sin \alpha$ , il vient aussi

$$m' = m \sin \alpha.$$

De là on conclut

$$h = \frac{(D + \Sigma) \sin \alpha (1 + D \cos \delta)}{[D \sin \alpha + \sin(\alpha + \delta)]^2},$$

$$k = \frac{(D + \Sigma) \sin \alpha}{D \sin \alpha + \sin(\alpha + \delta)}.$$

En chaque point, on prendra pour  $a$  la plus grande et pour  $b$  la plus petite des valeurs de ces deux quantités.

Pour retrouver les formules relatives aux perspectives ordinaires, il suffirait de faire, dans celles que nous venons d'obtenir,  $\Sigma = 1$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

Pour déduire des mêmes formules celles qui se rapportent aux développements de perspectives épicylindriques, il suffirait de faire tendre  $\alpha$  vers zéro, tout en conservant à  $\Sigma \sin \alpha$  une valeur finie  $n$ . L'abscisse d'un point quelconque de la carte serait la limite de l'excès sur  $r$  de la valeur que prend  $r$  pour  $\delta = \frac{\pi}{2}$ , et l'ordonnée serait la limite du produit de cette même valeur par  $m \sin \alpha$ .

#### 94. Projection stéréographique à cône du P. Braun.

— La perspective est prise sur le cône circonscrit à l'un des deux hémisphères suivant le parallèle de  $30^\circ$  de lati-

tude ; le point de vue se trouve placé au pôle de l'autre hémisphère. Les formules sont alors

$$r = \frac{3 \sin \frac{\delta}{2}}{\sin \left( \frac{\pi}{6} + \frac{\delta}{2} \right)}, \quad m' = \frac{m}{2},$$

$$h = \frac{3}{4 \sin^2 \left( \frac{\pi}{6} + \frac{\delta}{2} \right)}, \quad k = \frac{3}{4 \cos \frac{\delta}{2} \sin \left( \frac{\pi}{6} + \frac{\delta}{2} \right)}.$$

A l'équateur on a :

$$a = \frac{3}{2}(\sqrt{3} - 1), \quad b = 3(2 - \sqrt{3}), \quad \sin \omega = \frac{2}{3}\sqrt{3} - 1;$$

sur le parallèle de 30° de latitude,

$$a = 1, \quad b = 1, \quad \omega = 0;$$

au pôle,

$$a = 3, \quad b = \frac{3}{2}, \quad \sin \omega = \frac{1}{3}.$$

95. *Développements de perspectives gnomoniques épiconiques.* — Nous disons que la perspective est *gnomonique* lorsque le point de vue occupe le centre de la sphère. En faisant  $D = 0$  dans les formules ci-dessus, on obtient celles qui conviennent aux *développements de perspectives gnomoniques épiconiques*, savoir

$$r = \frac{\Sigma \sin \delta}{\sin (\alpha + \delta)}, \quad m' = m \sin \alpha,$$

$$h = \frac{\Sigma \sin \alpha}{\sin^2 (\alpha + \delta)}, \quad k = \frac{\Sigma \sin \alpha}{\sin (\alpha + \delta)}.$$

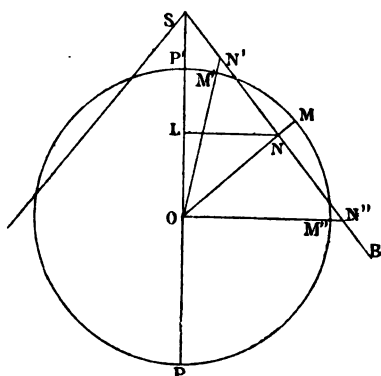
96. *Deuxième projection de Murdoch.* — C'est un de ces développements. Le cône y est normal aux rayons des divers points du parallèle de latitude moyenne, ou,

ce qui revient au même, homothétique au cône circonscrit suivant ce parallèle, de sorte que l'on a

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\delta' + \delta''}{2},$$

$\delta', \delta''$  désignant les colatitudes des deux parallèles extrêmes pour la contrée qu'il s'agit de représenter; de plus, le sommet du cône est choisi de manière que l'aire totale de la zone comprise entre ces deux parallèles se trouve conservée sur la carte, ce qui détermine la longueur  $\Sigma$ . Soient  $O$  (*fig. 12*) le centre de la Terre,  $P$  et  $P'$  les deux pôles,  $S$  le sommet du cône,  $M', M''$  deux points des parallèles extrêmes situés sur un même méridien,  $M$  le mi-

Fig. 12.



lieu de l'arc  $M'M''$ ,  $N, N', N''$  les intersections des rayons visuels  $OM, OM', OM''$  avec la génératrice  $SB$  perpendiculaire au premier. L'aire de la zone est  $2\pi (\cos \delta' - \cos \delta'')$  ou  $4\pi \cos \alpha \sin \frac{\delta'' - \delta'}{2}$ , et celle de sa projection,

$$2\pi \times LN \times N'N'';$$

or on a

$$LN = ON \cos \alpha, \quad N'N'' = 2NN' = 2ON \operatorname{tang} \frac{\delta'' - \delta'}{2}.$$

Pour que les deux surfaces soient équivalentes, il faut donc prendre

$$ON = \sqrt{\cos \frac{\delta'' - \delta'}{2}},$$

d'où

$$\Sigma = OS = \frac{ON}{\sin \alpha} = \sec \frac{\delta' + \delta''}{2} \sqrt{\cos \frac{\delta'' - \delta'}{2}}.$$

**97. Cas d'un cône circonscrit.** — Dans un développement de perspective gnomonique épiconique, lorsque le cône est tangent à la surface terrestre, le demi-angle au sommet  $\alpha$  est égal à la latitude du parallèle de contact, et l'on a  $\Sigma = \operatorname{coséc} \alpha$ , de sorte qu'il vient

$$h = \frac{1}{\sin^2(\alpha + \delta)}, \quad k = \frac{1}{\sin(\alpha + \delta)}.$$

Les altérations sont nulles sur le parallèle de contact et augmentent à mesure que l'on s'en éloigne. Le Tableau XXV se rapporte à la projection pour laquelle on a  $\alpha = 30^\circ$ .

**PROJECTIONS MÉRICONIQUES.**

98. Ici les parallèles sont encore représentés par des circonférences concentriques, mais les méridiens ne sont plus rectilignes. Appelons  $r$  et  $\varphi$  les coordonnées polaires d'un point quelconque de la carte, le centre commun des projections des parallèles étant pris comme pôle;  $r$  est encore une fonction de la latitude  $l$  seulement ou de la colatitude  $\delta$ , mais  $\varphi$  contient aussi l'une de ces deux variables, au lieu de contenir seulement  $m$ . Dans le triangle rectangle formé sur la carte par un arc infiniment petit de méridien, le rayon vecteur de l'une de ses extrémités et le parallèle qui passe par l'autre, l'un des côtés de l'angle droit est égal à  $dr$ , l'autre à  $r \left( \frac{d\varphi}{d\delta} \right) d\delta$ , et l'angle opposé à ce dernier n'est autre que  $\theta$ ; de plus, l'arc du parallèle de rayon  $r$  compris entre les projections des deux méridiens de longitudes  $m$  et  $m + dm$  est égal à  $r \left( \frac{d\varphi}{dm} \right) dm$ . De là on conclut

$$\text{tang } \theta = r \frac{\left( \frac{d\varphi}{d\delta} \right)}{\left( \frac{dr}{d\delta} \right)}, \quad h = \frac{dr}{d\delta} \sec \theta. \quad k = \frac{r}{\sin \delta} \left( \frac{d\varphi}{dm} \right).$$

**PROJECTIONS MÉRICONIQUES AUTHALIQUES.**

99. Si on laisse de côté les projections coniques, qui sont des cas particuliers de celles que nous considérons maintenant, aucune de ces dernières ne peut être auto-gonale, car, les parallèles de la carte étant des circonférences concentriques, pour que la projection d'un méridien



dien quelconque les coupe à angle droit, il faut que cette projection soit une droite passant par le centre commun. Au contraire, il y a une infinité de groupes de projections métriques authaliques.

En effet,  $r$  ayant été pris arbitrairement en fonction de  $\delta$ , posons

$$E = \frac{\sin \delta}{r \frac{dr}{d\delta}};$$

la condition  $ab = 1$ , ou  $hk \cos \theta = 1$ , sera partout remplie si l'on a

$$\frac{d\varphi}{dm} = E,$$

c'est-à-dire

$$\varphi = Em + F,$$

$F$  étant une fonction arbitraire de  $\delta$ , qui se réduira à zéro si l'on veut que le premier méridien ait pour projection une droite passant par le centre des parallèles de la carte.

Inversement, choisissons pour  $\varphi$  une fonction linéaire de  $m$ ; appelons  $E$  le coefficient, fonction de  $\delta$ , dont  $m$  doit y être affecté, et  $r_p$  le rayon de la circonférence par un arc de laquelle on veut que le pôle se trouve remplacé; en prenant

$$r^2 = r_p^2 + 2 \int_0^\delta \frac{\sin \delta}{E} d\delta,$$

on obtiendra une projection authalique. Si  $E$  était donné, non en fonction de  $\delta$ , mais en fonction de  $r$ , la relation entre  $r$  et  $\delta$  serait

$$\sin^2 \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2} \int_{r_p}^r E r dr.$$

Les formules relatives aux altérations sont ici

$$k = \frac{1}{\left(\frac{dr}{d\delta}\right)}, \quad \text{tang } \theta = (k \cos \delta - E) m; \quad h = \frac{\text{séc } \theta}{k};$$

elles ne contiennent pas  $F$ , qu'il sera toujours plus simple de prendre égal à zéro.

*Projections méridiennes authaliques à parallèles automécoïques.*

100. Si les arcs de parallèles doivent conserver leurs longueurs, c'est-à-dire si chaque rectangle infiniment petit du réseau formé par les méridiens et les parallèles du globe a même base que le parallélogramme correspondant de la carte, il faudra qu'ils aient aussi même hauteur pour que la projection soit authalique; cette condition donne  $dr = d\delta$ , d'où

$$r = r_p + \delta, \quad \varphi = \frac{\sin \delta}{r} m.$$

De là on conclut

$$k = 1, \quad \text{tang } \theta = \left( \cos \delta - \frac{\sin \delta}{r} \right) m, \quad h = \text{séc } \theta,$$

et aussi (formules 4)

$$\text{tang } \omega = \frac{1}{2} \text{tang } \theta.$$

Les altérations d'angles et de distances sont nulles en chaque point du premier méridien, ou méridien moyen; leurs maxima augmentent avec la longitude. Elles sont nulles aussi en chaque point d'un parallèle, dit *parallèle moyen*, dont la colatitude  $\delta_0$  satisfait à l'équation

$$\text{tang } \delta_0 - \delta_0 = r_p.$$

La projection de ce parallèle a pour rayon  $\text{tang } \delta_0$ ; elle

est donc la transformée du parallèle lui-même dans le développement du cône circonscrit au globe le long de cette ligne. Lorsqu'on y introduit  $\delta_0$  au lieu de  $r_p$ , l'expression de  $r$  devient

$$r = \text{tang} \delta_0 + \delta - \delta_0.$$

Au point où la projection d'un méridien quelconque rencontre celle du parallèle moyen, elle est tangente au rayon de ce parallèle, de sorte que, si l'on s'éloigne de ce point, soit dans un sens, soit dans l'autre, tout en restant sur le méridien, l'angle  $\varphi$  va en diminuant. D'ailleurs  $\cos \delta$  augmente à mesure que  $\delta$  diminue; donc, pour cette double raison,  $m \cos \delta - \varphi$  et par conséquent  $\theta$ ,  $\omega$  et  $\alpha$  augmentent du parallèle moyen au pôle boréal. En ce dernier point on a, quel que soit  $r_p$ ,  $\text{tang} \theta = m$ ,  $\text{tang} \omega = \frac{m}{2}$ . Au-dessous du parallèle moyen, il faut prendre

$$\text{tang} \theta = \varphi - m \cos \delta.$$

A l'aide de la dérivée par rapport à  $\delta$ , on constate facilement que  $\theta$  augmente depuis le parallèle moyen jusqu'à l'équateur, et qu'il continue même à augmenter dans l'hémisphère austral jusqu'au parallèle dont la colatitute  $\delta_\mu$  et le rayon de la projection  $r_\mu$  satisfont à l'équation

$$\cot \delta_\mu + r_\mu - \frac{1}{r_\mu} = 0,$$

dans laquelle on a

$$r_\mu = \delta_\mu + r_p;$$

le maximum  $\Theta$  est donné par

$$\text{tang} \Theta = m r_\mu \sin \delta_\mu.$$

Le groupe de projections que nous venons de considérer est celui que l'on désigne habituellement sous le nom

de *projection de Bonne* ou du *Dépôt de la Guerre* ou de *la Carte de France* (Tableau XVI et Tableaux L). On peut déterminer le point central, ou point de rencontre du méridien et du parallèle moyens, de telle manière que la projection devienne périgonale et en même temps périmécoïque pour une contrée donnée ; la méthode à suivre serait analogue au procédé graphique que nous avons indiqué pour le cas seulement où la contrée à représenter est d'une étendue comparable à celle de la France (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 29 mars 1858). Dans ce cas on a, avec assez d'approximation,

$$\theta = m(\delta - \delta_0) \sin \delta_0, \quad \omega = \frac{\theta}{2}, \quad a = 1 + \omega, \quad b = 1 - \omega.$$

En faisant  $r_p = \infty$  ou  $\delta_0 = \frac{\pi}{2}$ , on retrouve la projection sinusoidale de Nicolas Samson ; le parallèle moyen est ici l'équateur.

101. *Projections de Werner*. — En prenant  $r_p = 0$ , ce qui donne  $\delta_0 = 0$  et réduit le parallèle moyen à un cercle infiniment petit situé au pôle, on obtient une projection proposée par Werner en 1514 (Tableau XIX). Dans cette projection, l'équation qui donne la colatitude  $\delta_\mu$  du parallèle sur lequel se présentent les plus grandes valeurs de  $\theta$ ,  $\omega$  et  $a$  se réduit à

$$\cot \delta_\mu + \delta_\mu - \frac{1}{\delta_\mu} = 0 ;$$

on en tire  $\delta_\mu = 90^\circ + 67^\circ 12' 10''$  ; les valeurs correspondantes de  $2\omega$  et  $a$  sont respectivement  $79^\circ 43'$  et  $2,138$ .

Werner a indiqué, pour la représentation du globe entier, deux autres projections, lesquelles diffèrent de la précédente en ceci seulement que les arcs de parallèles

de la carte ne se trouvent plus égaux à ceux du globe, mais ils restent avec eux dans un rapport constant. Ce rapport étant désigné par  $n$ , on a

$$r = \delta, \quad \varphi = n \frac{\sin \delta}{\delta} m,$$

d'où l'on conclut

$$\text{tang} \theta = nm \cos \delta - \varphi, \quad h = \sec \theta, \quad k = n.$$

Werner a proposé les valeurs  $n = \frac{\pi}{2}$ ,  $n = \frac{\pi}{3}$ .

C'est à tort que ces projections ont été considérées comme ne conservant pas les surfaces. En effet, on a ici  $S = n$ ; or, par un simple changement d'échelle, on peut faire en sorte que toutes les longueurs de la carte se trouvent divisées par  $\sqrt{n}$ , et par conséquent les aires par  $n$ . Les angles  $\varphi$  et  $\theta$  conserveront les mêmes expressions, mais il viendra

$$r = \frac{\delta}{\sqrt{n}}, \quad h = \frac{\sec \theta}{\sqrt{n}}, \quad k = \sqrt{n}, \quad S = 1.$$

Alors il faudra considérer les longueurs sur le méridien rectiligne de la carte comme étant avec les longueurs correspondantes du globe dans le rapport de 1 à  $\sqrt{n}$  et, sur les parallèles, dans le rapport inverse.

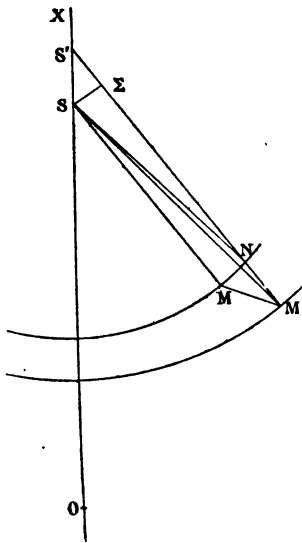
Nous n'avons à mentionner aucune projection hémiconique aphyllactique.

**PROJECTIONS POLYCONIQUES.**

102. Nous appelons *projections polyconiques* celles dans lesquelles les parallèles sont représentés par des portions de circonférences ayant leurs centres en ligne droite.

Soient  $OX$  (*fig. 13*) la ligne des centres des parallèles de la carte,  $O$  un point choisi sur cette ligne et à partir

Fig. 13.



duquel seront comptées les distances,  $S$  le centre de la projection du parallèle de colatitude  $\delta$ ,  $M$  la projection du point de ce parallèle qui a pour longitude  $m$ . Appelons  $\varphi$  l'angle  $OSM$ ,  $r$  le rayon  $SM$  et  $s$  la distance  $OS$ . Le

mode de projection se trouvera défini si l'on donne  $r$  et  $s$  en fonction de  $\delta$ , ainsi que  $\varphi$  en fonction de  $\delta$  et de  $m$ .

Soient  $S'$  le centre de la projection du parallèle de co-latitude  $\delta + d\delta$ ,  $M'$  la projection du point de ce parallèle qui appartient au méridien de  $M$ . Plaçons la lettre  $N$  au point où le rayon  $S'M'$  rencontre la projection du premier parallèle, puis tirons  $SM'$  et  $SN$ ; enfin abaissons  $S\Sigma$  perpendiculaire sur  $S'M'$ . On a

$$SS' = ds, \quad S'M' - SM = dr, \quad OS'M' = OSM = \left(\frac{d\varphi}{d\delta}\right) d\delta,$$

et le triangle rectangle  $SS'\Sigma$  donne

$$S\Sigma = \sin \varphi \cdot ds, \quad S'\Sigma = \cos \varphi \cdot ds.$$

Afin d'obtenir  $\theta$ , qui, à la limite, n'est autre que l'angle  $MM'N$ , nous calculerons séparément  $MN$  et  $M'N'$ . On a d'abord

$$\begin{aligned} MN &= r \times \widehat{MSN}; \\ \widehat{MSN} &= \widehat{OSN} - \widehat{OSM} = \widehat{OS'M'} + \widehat{SNS'} - \widehat{OSM} \\ &= \widehat{OS'M'} - \widehat{OSM} + \widehat{SNS'} = \left(\frac{d\varphi}{d\delta}\right) d\delta + \widehat{SNS'}; \\ MN &= r \left(\frac{d\varphi}{d\delta}\right) d\delta + r \times \widehat{SNS'}. \end{aligned}$$

Mais, à la limite,  $S\Sigma$  est égal à  $r \times \widehat{SNS'}$ ; il vient donc

$$MN = r \left(\frac{d\varphi}{d\delta}\right) d\delta + \sin \varphi ds.$$

Maintenant, comme, à la limite aussi,  $\Sigma N$  est égal à  $SM$ , on a  $M'N + S'\Sigma = dr$ , et par conséquent

$$M'N = dr - \cos \varphi ds.$$

De là on conclut, dans le triangle rectangle  $MNM'$ ,

$$\text{tang } \vartheta = \frac{r \left( \frac{d\varphi}{d\delta} \right) d\delta + \sin \varphi ds}{dr - \cos \varphi ds}.$$

Le même triangle donne  $MM' = M'N \text{ séc } \theta$ , d'où résulte

$$h = \left( \frac{dr}{d\delta} - \frac{ds}{d\delta} \cos \varphi \right) \text{ séc } \theta.$$

Enfin, l'arc de parallèle compris, sur la carte, entre les deux méridiens de longitudes  $m$  et  $m + dm$  ayant pour longueur  $r \left( \frac{d\varphi}{dm} \right) dm$ , on a

$$k = \frac{r}{\sin \delta} \left( \frac{d\varphi}{dm} \right).$$

#### PROJECTIONS POLYCONIQUES RECTANGULAIRES.

103. Pour que les méridiens et les parallèles de la carte se coupent à angle droit, il faut que le numérateur de  $\text{tang } \theta$  s'annule, c'est-à-dire que l'on ait

$$r \left( \frac{d\varphi}{d\delta} \right) d\delta + \sin \varphi ds = 0;$$

si l'on pose

$$\frac{dL}{L} = \frac{ds}{r},$$

et que l'on intègre, il viendra

$$(18) \quad \text{tang } \frac{\varphi}{2} = \frac{M}{L},$$

$M$  étant fonction arbitraire de  $m$ . Comme les circonférences sur lesquelles se projettent les parallèles sont coupées orthogonalement par la ligne des centres, il y



aura un méridien dont la projection se fera sur cette ligne; nous pouvons le prendre pour premier méridien; il en résultera que  $M$  devra s'annuler en même temps que  $m$ .

La condition que nous venons d'obtenir laisse, comme on le voit,  $r$  et  $s$  indéterminés en fonction de  $\delta$ . Inversement, si l'on se donne  $\text{tang}^2 \frac{\varphi}{2}$  égal au produit d'une fonction  $M$  de  $m$  par une fonction  $\frac{1}{L}$  de  $\delta$ , la projection aura son canevas rectangulaire, quel que soit  $s$ , pourvu que l'on prenne

$$r = L \frac{ds}{dL};$$

elle l'aura aussi, quel que soit  $r$ , pourvu que l'on prenne

$$s = \int \frac{r}{L} dL.$$

Les expressions de  $h$  et de  $k$ , dont l'une donnera  $a$  et l'autre  $b$ , sont devenues

$$h = \frac{dr}{d\delta} - \frac{ds}{d\delta} \cos \varphi, \quad k = \frac{r}{\sin \delta} \frac{\sin \varphi}{M} \frac{dM}{dm}.$$

*Projections polyconiques autogonales.*

104. La condition  $\theta = 0$  étant remplie, si l'on pose de plus  $h = k$ , on trouve, en éliminant la variable  $s$  pour ne conserver que  $r$ ,  $L$  et  $M$ ,

$$\frac{dM}{dm} = \frac{(Ldr + rdL) \sin \delta}{2rL^2 d\delta} \left[ M^2 + \frac{L^2(Ldr - rdL)}{Ldr + rdL} \right].$$

Puisque  $M$  est indépendant de  $\delta$ , le coefficient de  $M^2$  dans

le second membre doit être constant; le terme qui accompagne  $M^2$  doit aussi se réduire à une constante, et l'on peut supposer cette dernière égale à l'unité en valeur absolue, car, pour la rendre égale à un autre nombre, il suffirait, sans changer  $r$ , de multiplier  $L$  par ce nombre, ce qui ne modifierait pas  $s$ ; mais alors, en vertu de l'équation,  $M$  se trouverait multiplié par le même nombre et la valeur de  $\varphi$  ne changerait pas non plus. Nous poserons d'abord

$$\frac{L^2(Ldr - r dL)}{L dr + r dL} = 1,$$

ce qui donne

$$r = \frac{1}{2} \left( L - \frac{1}{L} \right).$$

L'intégration, qui se fait en passant par les logarithmes, introduirait en facteur dans l'expression de  $r$  une constante arbitraire, mais cependant positive; comme l'échelle de la carte n'est pas fixée, nous pouvons prendre cette constante égale à l'unité. La condition  $\theta = 0$  nous a donné d'ailleurs

$$ds = \frac{r}{L} dL,$$

d'où nous concluons

$$s = \frac{1}{2} \left( L + \frac{1}{L} \right).$$

Ici encore il y aurait à compléter le second membre par l'addition d'une constante arbitraire; mais nous pouvons la supposer nulle sans nuire à la généralité des résultats, puisque nous sommes libres de placer l'origine à partir de laquelle nous comptons les distances en un point quelconque de la ligne des centres des projections des parallèles.

Des valeurs précédentes de  $r$  et de  $s$  on déduit

$$s + r = L, \quad s - r = \frac{1}{L},$$

et par conséquent

$$s^2 - r^2 = 1.$$

Cette dernière équation prouve que la circonférence décrite de l'origine comme centre, avec l'unité pour rayon, coupe à angle droit les parallèles de la carte. Il en sera de même de toutes les circonférences qui passeront par les points d'intersection de la première avec la ligne des centres des parallèles, car les tangentes qu'on peut leur mener par un point quelconque de cette ligne sont égales entre elles; donc ces circonférences, puisqu'elles constituent les trajectoires orthogonales des parallèles de la carte, ne sont autre chose que les projections des méridiens.

Ainsi, deux points étant pris arbitrairement pour représenter les deux pôles, les méridiens de la carte seront les arcs de cercle dont les extrémités se trouvent en ces deux points, et les parallèles seront d'autres arcs de cercle ayant leurs centres aux divers points des prolongements de la ligne des pôles et passant chacun par le point de contact de la tangente menée du centre à l'un quelconque des méridiens, par exemple à la circonférence décrite sur la ligne des pôles comme diamètre. Il nous reste à trouver les expressions de  $L$ ,  $r$ ,  $s$  en fonction de  $\delta$  et celle de  $M$  en fonction de  $m$ ; celle-ci permettra de reconnaître, dans la première série d'arcs, quel est celui qui correspond à un demi-méridien de longitude donnée  $m$ , et les autres quel est, parmi les arcs de la seconde série, celui qui correspond à un parallèle de colatitude donnée  $\delta$ .

Introduisons les valeurs ci-dessus de  $r$  et de  $s$ , en

fonction de  $L$ , dans le coefficient de  $M^2$ , et désignons par  $n$  le double de la constante à laquelle ce coefficient doit se réduire, nous aurons

$$\frac{\sin \delta dL}{(L^2 - 1) d\delta} = \frac{n}{2},$$

d'où

$$L = \frac{1 + c \left( \operatorname{tang} \frac{\delta}{2} \right)^n}{1 - c \left( \operatorname{tang} \frac{\delta}{2} \right)^n},$$

$c$  étant un nombre positif arbitraire. De là on conclut

$$r = \frac{2c \left( \operatorname{tang} \frac{\delta}{2} \right)^n}{1 - c^2 \left( \operatorname{tang} \frac{\delta}{2} \right)^{2n}},$$

$$s = \frac{1 + c^2 \left( \operatorname{tang} \frac{\delta}{2} \right)^{2n}}{1 - c^2 \left( \operatorname{tang} \frac{\delta}{2} \right)^{2n}}.$$

L'équation différentielle est devenue maintenant

$$\frac{dM}{dm} = \frac{n}{2} (M^2 + 1),$$

et donne

$$M = \operatorname{tang} \frac{mm}{2},$$

les longitudes étant comptées à partir du méridien dont la projection est rectiligne.

Si donc on pose

$$\operatorname{tang} \frac{\delta'}{2} = c \left( \operatorname{tang} \frac{\delta}{2} \right)^n, \quad l' = \frac{\pi}{2} - \delta',$$

ce qui donne

$$L = \cot \frac{l'}{2},$$

les projections polyconiques autogonales que nous venons d'obtenir se trouveront définies par les formules

$$r = \cot l', \quad s = \operatorname{cosec} l',$$

$$\operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} = \operatorname{tang} \frac{l'}{2} \operatorname{tang} \frac{nm}{2}.$$

Pour le moment, nous ne dirons rien de plus de ces projections, que nous devons retrouver parmi les projections sphériques.

Considérons maintenant les projections que l'on obtiendrait en égalant, non plus à 1, mais à  $-1$ , le terme qui accompagne  $M^2$  dans l'équation différentielle entre  $M$  et  $m$ . On trouvera d'abord

$$r = \frac{1}{2} \left( L + \frac{1}{L} \right), \quad s = \frac{1}{2} \left( L - \frac{1}{L} \right),$$

d'où l'on conclut

$$r^2 - s^2 = 1.$$

Cette dernière relation montre que les circonférences projections des parallèles passent toutes par les deux points de l'axe des  $y$  qui se trouvent à une distance de l'origine égale à l'unité; leurs trajectoires orthogonales et par conséquent les projections des méridiens seront donc d'autres circonférences ayant leurs centres sur l'axe des  $y$  et pour rayons les tangentes menées à la circonférence décrite de l'origine comme centre avec l'unité pour rayon.

En égalant le coefficient de  $M^2$  à une constante, on déterminerait  $L$  en fonction de  $\delta$ , puis  $M$  en fonction de  $m$ . Les intégrations se font sans difficulté. Nous re-

viendrons aussi, à propos des projections sphériques, sur cette seconde série de projections polyconiques autogonales.

*Projection polyconique rectangulaire des Américains.*

105. L'équateur et le premier méridien sont développés en vraie grandeur suivant deux droites perpendiculaires entre elles, et le rayon de la projection d'un parallèle quelconque est égal à la génératrice du cône circonscrit au globe suivant ce parallèle. Cette définition donne,  $s$  étant compté à partir de la projection de l'équateur,

$$r = \operatorname{tang} \delta, \quad s = \operatorname{tang} \delta + \frac{\pi}{2} - \delta, \quad L = \sec \delta.$$

Quant à  $M$ , il se trouve déterminé par la condition que les arcs d'équateur soient conservés : la projection de l'arc compris entre le premier méridien et le méridien de longitude  $m$  sur le parallèle de colatitude  $\delta$  a pour longueur  $r\varphi$  ou  $\varphi \operatorname{tang} \delta$  ; sur l'équateur il aura pour longueur la limite vers laquelle tend cette expression pour  $\delta = \frac{\pi}{2}$  ; or, dans cette limite, on peut remplacer  $\varphi$  par  $2 \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2}$ , ou par  $M \cos \delta$ , ce qui conduit à considérer la limite de  $2 M \sin \delta$ , laquelle est  $2 M$  ; il faut donc que l'on ait

$$M = \frac{m}{2}, \quad \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} = \frac{m}{2} \cos \delta.$$

Il vient alors, pour les rapports de longueurs sur le méridien et sur le parallèle,

$$a = 1 + 2 \operatorname{tang}^2 \delta \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad b = \cos^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Les méridiens ont pour projections des courbes transcendantes, mais l'expression de  $\tan \frac{\varphi}{2}$  permet d'obtenir chaque point de la carte à l'aide d'une construction géométrique très simple.

Les Tableaux XXVIII sont ceux qui se rapportent à cette projection.

PROJECTIONS POLYCONIQUES AUTHALIQUES.

106. La condition  $hk \cos \theta = 1$  donne ici

$$\frac{r}{\sin \delta} \left( \frac{dr}{d\delta} - \frac{ds}{d\delta} \cos \varphi \right) \left( \frac{d\varphi}{dm} \right) = 1,$$

d'où, en intégrant par rapport à  $m$ ,

$$(19) \quad \frac{r}{\sin \delta} \left( \frac{dr}{d\delta} \varphi - \frac{ds}{d\delta} \sin \varphi \right) = m + t,$$

$t$  désignant une fonction arbitraire de  $\delta$ .

On peut donc prendre arbitrairement  $r$ ,  $s$ ,  $t$ , en fonction de  $\delta$ ;  $\varphi$  se trouvera déterminé en fonction de  $\delta$  et de  $m$ , par l'équation précédente.

Inversement, si l'on donne la relation qui doit lier  $\varphi$  à  $\delta$  et à  $m$ , pourvu que cette relation soit telle que  $m$  se trouve être une fonction linéaire de  $\varphi$  et de  $\sin \varphi$ , il y aura une infinité de projections polyconiques authaliques pour lesquelles la relation sera satisfaite. En effet,  $t$ ,  $u$ ,  $v$  étant les fonctions données de  $\delta$ , soit

$$u \varphi - v \sin \varphi = m + t$$

la relation assignée. Pour l'identifier avec l'équation ci-dessus, il suffit de prendre

$$r^2 = r_p^2 + \int_0^\delta u \sin \delta d\delta, \quad s = s_p + \int_0^\delta \frac{v}{r} \sin \delta d\delta,$$

$r_p$  et  $s_p$  désignant deux constantes arbitraires.

Il n'existe pas de projection polyconique authalique rectangulaire, si ce n'est la projection centrale, les projections coniques et les projections tronconiques authaliques, lesquelles peuvent être considérées comme des cas particuliers des projections polyconiques. En effet, prenons les dérivées des deux membres de l'équation (19) par rapport à  $\delta$ , ou plus simplement par rapport à  $\zeta$ , qui est ici  $\sin l$ , en ayant égard aux équations (17) et (18); nous ferons ainsi disparaître  $m$ . Effectuons ensuite la même opération sur l'équation obtenue, après avoir divisé tous ses termes par le coefficient de  $\varphi$ ; nous arriverons à une équation algébrique en  $M$ , qui devra être satisfaite identiquement, puisque  $M$  est indépendant de  $\delta$ . Or on constate que les coefficients des diverses puissances de  $M$  ne peuvent disparaître que si  $L$  est constant, ce qui exige que  $s$  le soit aussi, et par conséquent que les parallèles de la carte aient même centre.

PROJECTIONS POLYCONIQUES APHYLACTIQUES  
OBLIQUANGLES.

107. Avant de parler de celles qui ont été proposées jusqu'à présent, et qui se réduisent à deux, la *projection polyconique ordinaire des Américains* et la *première projection du P. Fournier*, nous en indiquerons un groupe dans lequel il peut être avantageux de faire un choix lorsque la contrée à représenter est peu étendue en longitude. Chaque parallèle a pour projection sa transformée dans le développement du cône circonscrit au globe le long du parallèle lui-même, et les projections des méridiens, dont l'une est rectiligne, se trouvent déterminées par la condition que les parallèles soient auto-mécoïques; seulement l'échelle adoptée pour le tracé des parallèles de la carte n'est pas nécessairement la même



que pour celui des méridiens. Ainsi, les longueurs des arcs de parallèles étant rigoureusement conservées, nous supposerons que le rayon de chacun d'eux sur la carte, et la distance de son centre au centre de la carte soient égaux respectivement, non à la génératrice du cône et à la distance de son sommet au centre du globe, mais aux produits de ces deux lignes par un nombre constant  $n$ . Cette définition donne

$$r = n \cot l, \quad s = n \operatorname{cosec} l, \quad \varphi = \frac{1}{n} m \sin l,$$

d'où l'on conclut

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{\sin \varphi - \frac{1}{2n} m \sin 2l}{\operatorname{sec} l - \cos \varphi}, \quad S = \frac{n(1 - \cos l \cos \varphi)}{\sin^2 l},$$

$$h = S \operatorname{sec} \theta, \quad k = 1.$$

Pour des valeurs peu considérables de  $m$ , on peut négliger les puissances de cette variable à partir de la troisième; il vient alors

$$\theta = \frac{1}{2n} m \sin 2l, \quad S = \frac{n}{2} \operatorname{sec}^2 \frac{l}{2} + \frac{1}{2n} m^2 \cos^3 l, \quad k = 1,$$

$$h = S + \frac{1}{n} \left( m \cos^2 l \sin \frac{l}{2} \right)^2.$$

La valeur qu'il convient d'adopter pour  $n$  dépend de la latitude moyenne de la contrée dont on veut faire la carte.

108. *Projection polyconique ordinaire des Américains* (Tableaux XXX). — Le premier méridien se développe en vraie grandeur suivant une droite. Les rayons des parallèles, sur la carte, sont égaux aux génératrices des cônes circonscrits au globe suivant ces parallèles; enfin les longueurs des arcs de parallèles se trouvent conservées, ce qui détermine le tracé par points

des projections des divers méridiens. On a ici

$$r = \cot l, \quad s = l + \cot l, \quad \varphi = m \sin l,$$

d'où résulte

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} \theta &= \frac{\varphi - \sin \varphi}{\sec^2 l - \cos \varphi}, \quad S = 1 + 2 \cot^2 l \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \\ k &= 1, \quad h = S \sec \theta. \end{aligned}$$

Lorsqu'on néglige les puissances de  $m$  à partir de la cinquième, l'expression de  $\theta$  se réduit à

$$\theta = \frac{1}{12} m^3 \sin l \sin 2l,$$

ce qui fait voir que le canevas est à très peu près orthogonal. On a, de plus, en négligeant les puissances de  $m$  à partir de la troisième seulement,

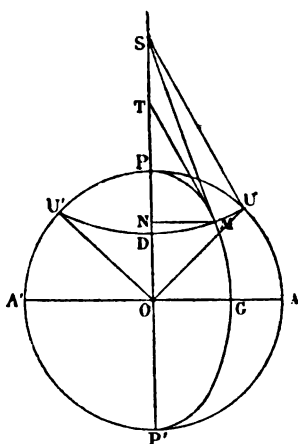
$$a = 1 + \frac{1}{2} m^2 \cos^2 l, \quad b = 1, \quad \omega = \frac{1}{4} m^2 \cos^2 l.$$

109. *Première projection du P. Fournier* (Tableaux XXXV). — Des deux projections que le P. Fournier a proposées en 1646, la première est une projection polyconique à méridiens elliptiques. L'équateur et le premier méridien se trouvent développés en vraie grandeur suivant deux droites perpendiculaires entre elles; la première sert de grand axe à toutes les ellipses, qui se construisent, du reste, comme dans la projection de Mollweide. Le méridien principal est une circonférence. Les projections des parallèles interceptent sur cette circonférence et sur la projection du premier méridien des longueurs proportionnelles aux arcs correspondants du globe.

Soient APA'P' (*fig.* 14) une circonférence dont le rayon OP soit égal à  $\frac{\pi}{2}$ ; elle représentera le méridien

principal; soient  $PP'$  le premier méridien de la carte et  $AA'$  l'équateur. Si nous prenons  $OD$  égal à  $l$ , et si nous faisons les angles  $AOU$ ,  $A'OU'$  égaux aussi à  $l$ , la circonférence passant par les trois points  $U$ ,  $D$ ,  $U'$  sera la projection du parallèle de latitude  $l$ . En prenant  $OG$  égal à  $m$  et construisant une demi-ellipse ayant pour

Fig. 14.



sommets  $P$ ,  $G$ ,  $P'$ , on obtiendra la projection du méridien de longitude  $m$ . Soient  $M$  le point où elle coupe celle du parallèle et  $S$  le centre de cette dernière; menons l'ordonnée  $MN$  du point  $M$  et la tangente  $MT$  à l'ellipse; tirons  $SU$  et  $SM$ .

D'après la manière dont le point  $D$  a été construit, on a

$$s - r = l;$$

le triangle  $OSU$  donne d'ailleurs

$$r^2 = s^2 + \frac{\pi^2}{4} - \pi s \sin l,$$

ou, en vertu de l'équation précédente,

$$l(r + s) - \pi \sin l \cdot s + \frac{\pi^2}{4} = 0.$$

La première et la troisième équation fournissent les expressions de  $r$  et  $s$ , savoir

$$s = \frac{\frac{\pi^2}{4} - l^2}{\pi \sin l - 2l}, \quad r = s - l.$$

En prenant les dérivées des deux membres par rapport à  $l$  dans chacune de ces mêmes équations, on obtient

$$\frac{ds}{dl} = \frac{2r - \pi s \cos l}{\pi \sin l - 2l}, \quad \frac{dr}{dl} = \frac{ds}{dl} - 1.$$

Nous continuons à désigner l'angle OSM par  $\varphi$ . Le triangle SMN donne, pour les coordonnées rectangulaires de M,

$$x = s - r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi;$$

en les substituant à  $x$  et à  $y$  dans

$$\left(\frac{2x}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{y}{m}\right)^2 = 1,$$

qui est l'équation de l'ellipse PMP', et tirant la valeur de  $\cos \varphi$ , on trouve

$$\cos \varphi = \frac{1}{r(\pi^2 - 4m^2)}$$

$$\times [\pi \sqrt{4m^2 + 2\pi(2s \sin l - \pi)m^2 + \pi^2 r^2 - 4m^2 s}];$$

on peut donc calculer l'angle  $\varphi$  ainsi que  $x$  et  $y$ .

Cela posé, si nous appelons  $\psi$  l'angle OTM de la tangente en M à l'ellipse avec l'axe des abscisses, nous savons qu'on aura

$$\text{tang } \psi = \frac{4m^2 x}{\pi^2 y}.$$

D'ailleurs, l'altération  $\theta$  de l'angle du méridien avec le parallèle n'est autre que l'angle SMT, égal à la différence des angles OTM, OSM; il vient donc

$$\theta = \psi - \varphi.$$

Tout est maintenant connu dans l'expression de  $h$ , savoir

$$h = \left( \frac{ds}{dl} \cos \varphi - \frac{dr}{dl} \right) \sec \theta,$$

laquelle devient ici,

$$h = \left( 1 + 2 \frac{\frac{\pi}{2} s \cos l - r}{\frac{\pi}{2} \sin l - l} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \sec \theta;$$

celle de  $k$  est

$$k = r \left( \frac{d\varphi}{dm} \right) \sec l.$$

Or l'équation en  $\cos \varphi$ , étant différenciée par rapport à  $m$ , donne, quand on introduit ensuite  $x$  et  $y$  au lieu de  $\varphi$ ,

$$\left( \frac{d\varphi}{dm} \right) = \frac{\pi^2 y}{m [\pi^2 s - (\pi^2 - 4m^2)x]};$$

le rapport  $k$  est donc aussi connu.

Sur le premier méridien, on a

$$\varphi = 0, \quad \theta = 0, \quad h = 1, \quad k = \sec l \sqrt{1 - \left( \frac{2l}{\pi} \right)^2};$$

sur le méridien principal,

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{1}{r} \left( s - \frac{\pi}{2} \sin l \right), & \sin \theta &= \frac{1}{\pi r} \left[ \frac{\pi^2}{4} - l(r + s) \right], \\ h &= \frac{\sec l}{s} \left[ \left( l - \frac{\pi}{2} \sin l \right) \frac{ds}{dl} + r \right], & k &= \frac{r}{s}. \end{aligned}$$

**PROJECTIONS SPHÉRIQUES RECTANGULAIRES.**

110. Nous nous proposons actuellement d'étudier les propriétés communes à toutes les projections dans lesquelles les méridiens de la carte sont des circonférences, et les parallèles des courbes coupant ces circonférences à angle droit. Nous supposerons, de plus, qu'à chaque point du globe doit correspondre un point de la carte et un seul, condition qui n'est pas toujours remplie dans les projections que nous avons examinées jusqu'à présent, puisque dans certaines d'entre elles le pôle se trouve remplacé par une portion de droite ou un arc de cercle de rayon fini. Cette condition exige que toutes nos circonférences aient deux points communs, qui seront les projections des deux pôles, de sorte que les centres seront situés sur une même droite perpendiculaire à la corde commune en son milieu. Les tangentes menées aux diverses circonférences par un point quelconque de l'un des prolongements de la corde commune seront égales entre elles, et si de ce point comme centre, avec l'une des tangentes pour rayon, on décrit une nouvelle circonférence, celle-ci coupera toutes les anciennes à angle droit. On voit donc que les trajectoires orthogonales des méridiens de la carte, c'est-à-dire les parallèles, sont aussi des circonférences, de sorte que l'on a bien une projection sphérique. Le lieu des centres des parallèles est une droite passant par les projections des deux pôles et perpendiculaire au lieu des centres des méridiens.

Tout point de l'un des prolongements de la ligne des pôles de la carte peut être considéré comme le centre de la projection de l'un des parallèles, et le rayon de cette

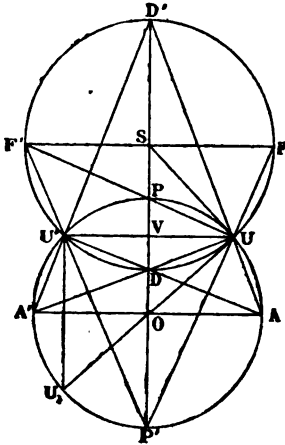
projection est alors égal à la tangente menée par le point considéré à l'un quelconque des méridiens de la carte, par exemple à la circonférence décrite sur la ligne des pôles comme diamètre. Réciproquement, si, dans une projection à canevas orthogonal, les parallèles sont des circonférences ayant leurs centres sur les prolongements de l'un des diamètres d'une circonférence donnée, et pour rayons les tangentes menées des divers centres à cette circonférence, les méridiens seront aussi des circonférences, lesquelles passeront par les deux extrémités du diamètre donné. Il n'en serait plus de même si les rayons des parallèles se trouvaient déterminés par une condition autre que celle qui vient d'être indiquée; la projection polyconique rectangulaire des Américains fournit un exemple d'un canevas orthogonal dans lequel les parallèles, mais non les méridiens, sont des circonférences.

Les propriétés que nous venons d'indiquer ne sont pas les seules que l'on puisse étendre de la projection stéréographique à toutes les projections autogonales à méridiens circulaires, et de celles-ci aux projections à méridiens circulaires et à canevas orthogonal. Soient P et P' (*fig. 15*) les projections des deux pôles, O le milieu de la droite PP', APA'P' la circonférence décrite sur PP' comme diamètre, AA' le diamètre perpendiculaire à PP'; soient encore S le centre de la projection d'un parallèle quelconque, U et U', D et D', F et F' les points où cette projection rencontre respectivement la circonférence APA'P', la droite PP' et la perpendiculaire élevée en S sur cette droite; soient enfin V l'intersection de PP' avec UU', et U, le symétrique de U par rapport à O, lequel se trouve avec U' sur une parallèle à PP'.

Le point D étant le milieu de l'arc UDU', UD est bissectrice de l'angle formé par la corde UU' et la tan-

gente  $OU$ ; le point  $A'$  étant le milieu de l'arc  $U'A'U_1$ ,  $UA'$  est aussi bissectrice de l'angle  $U'UU_1$ ; donc les trois points  $U, D, A'$  sont en ligne droite, ce qui permet de construire le point  $D$ , sans tracer la circonfé-

Fig. 15.



rence  $S$ , lorsque  $U$  est donné. Comme les angles  $AUA'$ ,  $DUD'$ , inscrits chacun dans un demi-cercle, sont droits, les trois points  $A, U, D'$  sont aussi sur une même droite, laquelle est bissectrice de l'angle formé par un des côtés de  $\widehat{U'UU}$ , avec le prolongement de l'autre.

L'angle  $PUA'$  qui intercepte, sur la circonférence  $O$ , un arc égal au quart de cette circonférence est égal à la moitié d'un droit; il en est de même de l'angle  $DUF'$ , qui intercepte sur la circonférence  $S$  un arc égal à son quart; les deux angles sont donc égaux, et, comme deux de leurs côtés  $UA', UD$  se confondent, les deux autres  $UP, UF'$  se confondent aussi, c'est-à-dire que les trois points  $U, P, F'$  sont en ligne droite. Comme  $UP'$  est per-

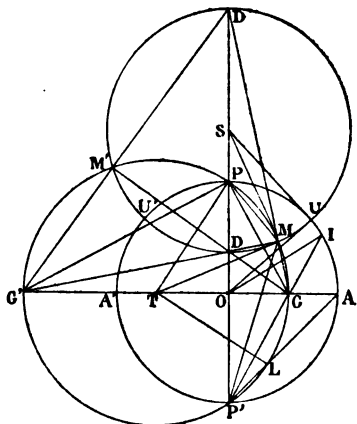


pendiculaire à  $UP$  et  $UF$  à  $UF'$ , les trois points  $P'$ ,  $U$ ,  $F$  sont aussi en ligne droite. Il résulte encore de là que  $UD$  est bissectrice de l'angle droit  $PUP'$  et  $UD'$  de l'angle adjacent  $PUF'$ ; donc la projection de chaque parallèle est le lieu des points dont les distances aux projections des deux pôles ont entre elles un rapport donné.

Les lignes  $UP$ ,  $UP'$  sont à leur tour bissectrices des angles droits  $DUD'$ ,  $DUA$ ; donc le rapport des distances d'un point quelconque de la circonférence  $O$  aux deux points  $D$  et  $D'$  est constant.

Sur la *fig. 16*, donnons aux lettres déjà employées la

Fig. 16.



même signification que sur la *fig. 15*. La demi-circonférence  $PAP'$  est la projection d'un méridien particulier. Considérons maintenant la projection  $PMGP'$  d'un méridien quelconque; soient  $T$  son centre,  $G$  et  $M$  ses points de rencontre avec  $AA'$  et avec la circonférence  $S$ , enfin  $G'$  et  $M'$  les points de rencontre de l'arc qui complète la circonférence  $T$  avec les deux mêmes lignes. Relativement aux deux circonférences  $S$  et  $T$ , nous aurions à

signaler les mêmes propriétés que relativement aux deux circonférences S et O. Il y a lieu, en outre, de faire les remarques suivantes :

Le rapport de MP à MP' étant le même que celui de DP à DP', la ligne MD est bissectrice de l'angle PMP', de sorte qu'elle doit passer par le milieu G' de l'arc PG'P'; donc les trois points M, D, G' sont en ligne droite; il en est de même des trois points D', M, G; il en est de même aussi de G, D, M' et de G', M', D'. Les trois points D', G, G' sont ainsi les sommets d'un triangle dont les hauteurs se coupent en D et ont leurs pieds en O, M' et M.

Faisons l'angle POI égal à celui sous lequel le méridien PMP' de la carte coupe le méridien rectiligne PP'; les trois points P', G, I seront en ligne droite. En effet, l'angle OP'G, qui intercepte l'arc PMG sur la circonférence T, est égal à la moitié de l'angle formé par la corde PP' avec la tangente en P', c'est-à-dire à la moitié de l'angle POI; donc, sur la circonférence O, il doit intercepter un arc égal à PI, c'est-à-dire que le prolongement de P'G doit passer en I. On a ainsi, pour déterminer directement le point G, un procédé analogue à celui dont on fait usage dans la projection stéréographique sur un méridien.

Menons TL, perpendiculaire à TP, jusqu'à sa rencontre en L avec la projection PMP' du méridien; les trois points P', L, A seront en ligne droite. En effet, l'angle PP'L, qui a son sommet sur la circonférence T et intercepte le même arc que l'angle au centre PTL, est égal à la moitié de ce dernier ou à la moitié d'un droit; donc le prolongement de P'L doit passer au point A.

411. Le rayon OP ou OA de la circonférence décrite sur la ligne des pôles comme diamètre étant pris pour unité, nous appellerons *latitude modifiée d'un parallèle*

l'arc AU de cette circonférence, compris entre le parallèle rectiligne AA' de la carte et la projection UDU' du parallèle considéré. Cet arc, que nous désignerons par  $l'$ , est aussi la moitié de l'angle sous lequel, du centre de la projection du parallèle, on verrait la circonférence décrite sur la ligne des pôles comme diamètre; il variera, comme  $l$ , de 0 à  $\frac{\pi}{2}$  et de 0 à  $-\frac{\pi}{2}$ . Pour abréger les formules, nous y introduirons parfois, au lieu de l'arc qui vient d'être défini, la colatitute modifiée  $\delta'$ , qui en est le complément, et qui représente l'arc PU, compris entre la projection du pôle et celle du parallèle;  $\delta'$  peut varier, comme  $\delta$ , de 0 à  $\pi$ .

Toute circonférence décrite d'un point S du prolongement de PP' comme centre, avec la tangente SU pour rayon, est, dans un système quelconque de projection à canevas orthogonal et à méridiens circulaires, la projection d'un parallèle; ce qui varie d'un système à l'autre, c'est la position de ce parallèle sur le globe, ou, inversement, c'est l'expression de  $l'$  ou de  $\delta'$  en fonction de  $l$  ou de  $\delta$ . Quelle que soit d'ailleurs cette expression, si l'on appelle  $r$  le rayon SD ou SU ou SM de la projection du parallèle et  $s$  la distance OS de son centre au centre de la carte, le triangle rectangle OSU donnera

$$r = \cot l', \quad s = \operatorname{cosec} l', \quad s^2 - r^2 = 1.$$

Comme les trois points A, D, U' sont en ligne droite, l'angle en A du triangle OAD n'est autre que  $\frac{l'}{2}$ , et il vient, dans ce triangle et dans le triangle OAD',

$$OD = \operatorname{tang} \frac{l'}{2}, \quad OD' = \cot \frac{l'}{2}.$$

On a bien  $OD \times OD' = 1$ , comme cela devait être, puisque la tangente OU est moyenne proportionnelle entre OD et OD'.

Le rapport constant des distances d'un point quelconque de la projection du parallèle aux projections P et P' des deux pôles sera

$$\frac{UP}{UP'} = \text{tang } PP'U = \text{tang } \frac{\delta'}{2}.$$

Occupons-nous maintenant des méridiens. Les longitudes étant comptées à partir de celui dont la projection est rectiligne, nous appellerons *longitude modifiée d'un méridien* l'angle sous lequel sa projection coupe la projection du premier méridien, angle que nous désignerons par  $m'$ ; c'est aussi la moitié de l'angle sous lequel, du centre de la projection du méridien, on verrait la ligne des pôles de la carte. Ainsi, pour le méridien projeté sur PGP',  $m'$  sera l'angle que fait PP' avec la tangente en P à l'arc PGP', ou, ce qui revient au même, l'angle OTP. La projection PGP' forme avec la corde PP' un segment capable de l'angle  $\pi - m'$ .

Le système de représentation peut varier sans que l'arc PGP' cesse d'être la projection d'un méridien terrestre; ce qui variera, ce sera la position de ce méridien sur le globe, ou, inversement, l'expression de  $m'$  en fonction de  $m$ . Quelle que soit d'ailleurs cette expression, si l'on appelle R le rayon TG ou TP ou TM de la projection du méridien, et D la distance OT de son centre au centre de la carte, le triangle rectangle OTP donnera

$$R = \text{coséc } m', \quad S = \text{cot } m', \quad R^2 - S^2 = 1,$$

et les triangles OPG, OPG',

$$OG = \text{tang } \frac{m'}{2}, \quad OG' = \text{cot } \frac{m'}{2}.$$

On a bien  $OG \times OG' = 1$ , ainsi que cela devait être, puisque OP est moyenne proportionnelle entre OG et OG'.

Les coordonnées  $l'$  et  $m'$ , ou bien  $\delta'$  et  $m'$ , déterminent la position d'un point quelconque de la carte; cependant nous ferons aussi usage d'une troisième variable dépendant des deux premières; ce sera l'angle OSM formé par le rayon SM de la projection du parallèle avec le méridien rectiligne, ou, ce qui revient au même, l'angle OTM formé par le rayon TM de la projection du méridien avec le parallèle rectiligne; nous désignerons cet angle par  $\varphi$ ; c'est aussi l'angle sous lequel on verrait, soit du centre de la projection du parallèle, soit du centre de la projection du méridien, la distance du point quelconque M au centre de la carte. La moitié de  $\varphi$  est égale à l'angle inscrit OG'M, qui intercepte sur la circonférence T le même arc que l'angle au centre OTM, ou bien encore à l'angle OG'D, puisque les trois points G', D, M sont en ligne droite; or la tangente de ce dernier est donnée par le rapport de OD à OG'; il vient donc

$$\text{tang } \frac{\varphi}{2} = \text{tang } \frac{l'}{2} \text{ tang } \frac{m'}{2}.$$

De cette formule, on peut tirer

$$\sin \varphi = \frac{\sin l' \sin m'}{1 + \cos l' \cos m'}, \quad \cos \varphi = \frac{\cos l' + \cos m'}{1 + \cos l' \cos m'}.$$

Les coordonnées rectangulaires du point M par rapport aux axes OD, OA sont

$$x = R \sin \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

On a, pour le carré de sa distance OM à l'origine

$$x^2 + y^2 = \frac{1 - \cos l' \cos m'}{1 + \cos l' \cos m'}.$$

112. Il est à remarquer que l'équation générale des cercles tracés sur la sphère et celle des cercles tracés sur la carte ont précisément la même forme lorsqu'on prend pour coordonnées  $l$  et  $m$  sur la sphère,  $l'$  et  $m'$  sur le plan. Si l'on exprime, en effet, le cosinus de la distance du pôle d'un cercle de la sphère à l'un quelconque des points du cercle dans le triangle qui a pour sommets ces deux points et le pôle géographique et qu'on l'égalé à une constante, on obtient une équation de la forme

$$(A \cos m + B \sin m) \cos l + C \sin l + D = 0,$$

$A, B, C, D$  étant des paramètres dont les rapports dépendent de la position et de la grandeur du cercle. D'autre part, si l'on prend en coordonnées rectangulaires l'équation d'un cercle tracé sur la carte et qu'on y remplace  $x$  et  $y$  par les valeurs ci-dessus, on voit de suite, en ayant égard à l'expression de  $x^2 + y^2$ , que l'équation prend la forme

$$(A' \cos m' + B' \sin m') \cos l' + C' \sin l' + D' = 0,$$

$A', B', C', D'$  étant aussi des constantes dépendant de la position du centre et de la grandeur du rayon. Dans la projection stéréographique méridienne, on a  $l' = l$  et  $m' = m$ , de sorte qu'il suffit de prendre  $A', B', C', D'$  proportionnels à  $A, B, C, D$  pour que les deux cercles se correspondent. Donc, dans la projection stéréographique sur un méridien, et par conséquent aussi sur l'horizon d'un lieu quelconque, tout cercle a pour projection un cercle.

113. Cherchons maintenant les axes de l'ellipse indicatrice en chaque point, lesquels sont ici les rapports de longueurs sur le méridien et sur le parallèle. Quand le point  $M$  se déplace infiniment peu sur la projection du

méridien, l'arc décrit est égal à  $R \left( \frac{d\varphi}{dl'} \right) dl'$ , et, sur le parallèle, à  $r \left( \frac{d\varphi}{dm'} \right) dm'$ ; on a donc

$$h = R \left( \frac{d\varphi}{dl'} \right) \frac{dl'}{dl}, \quad k = \frac{r}{\cos l} \left( \frac{d\varphi}{dm'} \right) \frac{dm'}{dm}.$$

Or, si l'on prend les logarithmes des deux membres de la formule qui donne  $\text{tang} \frac{\varphi}{2}$ , et qu'on différentie, il vient

$$\frac{d\varphi}{\sin \varphi} = \frac{dl'}{\sin l'} + \frac{dm'}{\sin m'},$$

ce qui fait connaître les expressions des dérivées de  $\varphi$  par rapport à  $l'$  et par rapport à  $m'$ , expressions que l'on peut d'ailleurs établir géométriquement; il en résulte, pour  $h$  et  $k$ ,

$$h = \frac{\sin \varphi}{\sin l' \sin m'} \frac{dl'}{dl}, \quad k = \frac{\sin \varphi}{\cos l \text{ tang} l' \sin m'} \frac{dm'}{dm},$$

ou bien encore

$$h = \frac{1}{1 + \cos l' \cos m'} \frac{dl'}{dl}, \quad k = \frac{\cos l'}{\cos l} \frac{1}{1 + \cos l' \cos m'} \frac{dm'}{dm}.$$

#### PROJECTIONS SPHÉRIQUES AUTOGONALES.

114. La condition  $h = k$ , dans une projection à canvas orthogonal et à méridiens circulaires, donne

$$\frac{\sec l' dl'}{\sec l dl} = \frac{dm'}{dm};$$

le premier membre est une fonction de  $l$  seulement, et le second de  $m$  seulement; il faut donc qu'ils soient

égaux à une même constante  $n$ ; il vient alors, en intégrant,

$$m' = nm, \quad \text{tang} \frac{\delta'}{2} = \left( \frac{\text{tang} \frac{\delta}{2}}{\text{tang} \frac{\delta_0}{2}} \right)^n.$$

Comme  $m'$  s'annule en même temps que  $m$ , il n'y a pas de constante arbitraire à introduire dans son expression. Quant à celle qui figure dans l'expression de  $\text{tang} \frac{\delta'}{2}$ , et que nous avons désignée par  $\delta_0$ , elle représente la colatitude du parallèle dont la projection est rectiligne.

En effet, pour  $\delta = \delta_0$ , il vient  $\delta' = \frac{\pi}{2}$ , d'où  $r = \infty$ . C'est à partir du pôle le plus voisin de ce parallèle que nous comptons les colatitudes; pour fixer les idées, nous supposerons que c'est le pôle boréal.

Les angles sont partout conservés, si ce n'est aux pôles. Pour qu'ils le soient aussi en ces deux points, il faut que l'on ait  $n = 1$ , et alors on obtient la projection stéréographique sur l'horizon du lieu du premier méridien dont la colatitude est  $\delta_0$ . Il est facile, d'après cela, d'imaginer pour la construction de cette projection un procédé autre que celui qu'on donne habituellement.

Si l'on prend  $\delta_0 = \frac{\pi}{2}$ , et que l'on fasse tendre  $n$  vers zéro, tout en laissant constant le produit de  $n$  par la longueur OP (*fig.* 16), que nous avons d'abord choisie comme unité, on retrouve la projection de Mercator. En effet, maintenons ce produit égal à 2; nous aurons constamment

$$\text{OG} = m \frac{\text{tang} \frac{m'}{2}}{\left(\frac{m'}{2}\right)}, \quad \text{OD} = \frac{2}{n} \frac{1 - \left(\text{tang} \frac{\delta'}{2}\right)^n}{1 + \left(\text{tang} \frac{\delta'}{2}\right)^n},$$



d'où, à la limite,

$$OG = m, \quad OD = \log \operatorname{tang} \frac{\delta}{2}.$$

Les valeurs que nous avons trouvées pour  $h$  et  $k$  dans un système quelconque de projection sphérique rectangulaire sont maintenant devenues égales entre elles, et l'on a, pour le rapport de longueurs en chaque point d'une projection autogonale,

$$a = \frac{n \sin \varphi}{\cos l \operatorname{tang} l' \sin m'}.$$

Il résulte de cette expression que, sur un même parallèle,  $a$  augmente ou diminue en même temps que  $m$ . Elle devient, lorsqu'on y substitue à  $\sin \varphi$  sa valeur soit en fonction de  $m'$  et de  $l'$ , soit en fonction de  $m'$  et de  $\delta'$ ,

$$a = \frac{n \operatorname{séc} l}{\operatorname{séc} l' + \cos m'}, \quad a = \frac{n \sin \delta'}{\sin \delta (1 + \sin \delta' \cos m')},$$

ou bien encore

$$\frac{n}{a} = \sin \delta \left[ \frac{1}{2} \left( \operatorname{tang} \frac{\delta'}{2} + \cot \frac{\delta'}{2} \right) + \cos m' \right];$$

il n'y aurait plus qu'à remplacer  $m'$  par  $nm$  et  $\operatorname{tang} \frac{\delta'}{2}$  par  $\left( \cot \frac{\delta_0}{2} \operatorname{tang} \frac{\delta}{2} \right)^n$ , pour avoir directement  $a$  en fonction de  $\delta$  et de  $m$ . On ne voit immédiatement sur aucune de ces formules ce que devient  $a$  aux pôles; c'est pourquoi nous écrivons encore la suivante

$$\begin{aligned} \frac{n}{a} = & \left( \cot \frac{\delta_0}{2} \right)^n \left( \sin \frac{\delta}{2} \right)^{1+n} \left( \cos \frac{\delta}{2} \right)^{1-n} \\ & + \left( \operatorname{tang} \frac{\delta_0}{2} \right)^n \left( \sin \frac{\delta}{2} \right)^{1-n} \left( \cos \frac{\delta}{2} \right)^{1+n} + \sin \delta \cos nm. \end{aligned}$$

Enfin nous aurons à faire usage des dérivées des deux premiers ordres de  $a$  par rapport à  $\delta$ ; on a

$$\frac{\sin \delta}{a} \frac{da}{d\delta} = \frac{n \cos \delta'}{1 + \sin \delta' \cos m'} - \cos \delta,$$

$$n \sin \delta \sin \delta' \frac{d^2 \frac{1}{a}}{d\delta^2} = n^2 - n \cos \delta \cos \delta' - \sin \delta^2 (1 + \sin \delta' \cos m').$$

115. Supposons d'abord  $n < 1$ . Alors aux deux pôles, c'est-à-dire pour  $\delta = 0$  et  $\delta = \pi$ , on aura  $a = \infty$ ; dans l'intervalle  $a$  passera sur chaque méridien par un *minimum*; en affectant de l'indice  $\mu$  les lettres qui se rapportent à  $u$  minimum, on aura

$$\frac{\cos \delta'_\mu}{1 + \sin \delta'_\mu \cos m'} = \frac{\cos \delta_\mu}{n},$$

$$a_\mu = \frac{\text{tang } \delta'_\mu}{\text{tang } \delta_\mu},$$

$$\sin \delta_\mu \sin \delta'_\mu \left[ \frac{d^2 \left( \frac{1}{a} \right)}{d\delta^2} \right]_\mu = n - \frac{\cos \delta'_\mu}{\cos \delta_\mu}.$$

Le point correspondant est, d'ailleurs, situé dans l'hémisphère austral; en effet, les valeurs que prend l'expression ci-dessus de  $\frac{\sin \delta}{a} \frac{da}{d\delta}$  pour  $\delta = 0$  et  $\delta = \pi$  sont respectivement  $n - 1$  et  $1 - n$ , de sorte que la première est négative et la seconde positive. Or, pour  $\delta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\delta'$  est obtus et la valeur correspondante de l'expression est négative; c'est donc de  $\delta = \frac{\pi}{2}$  à  $\delta = \pi$  que la dérivée s'annule.

On obtient  $\delta_\mu$  par tâtonnement, en calculant les valeurs de  $\delta'$  qui correspondent à des valeurs suffisamment

rapprochées de  $\delta$ , puis substituant les couples de valeurs ainsi obtenus à  $\delta_\mu$  et  $\delta'_\mu$  dans les deux membres de la première des équations ci-dessus, jusqu'à ce que ces deux membres deviennent sensiblement égaux. Cette équation se simplifie beaucoup pour certains méridiens particuliers. Ainsi, sur le premier méridien, elle devient

$$\text{tang } \frac{l'_\mu}{2} = \frac{\sin l}{n},$$

et l'on en conclut

$$\sin \delta_\mu \sin \delta'_\mu \left[ \frac{d^2 \left( \frac{1}{a} \right)}{d\delta^2} \right]_\mu = n \frac{n^2 - 1 - \cos^2 l_\mu}{n^2 + \sin^2 l_\mu}.$$

C'est sur ce méridien que se produit le plus petit de tous les *minima*.

116. Supposons maintenant  $n > 1$ ; tout ce qui précède subsistera, si ce n'est qu'aux pôles on aura  $a = 0$ , et que sur chaque méridien  $a$  passera par un maximum au lieu d'un minimum; ce maximum se produira dans l'hémisphère boréal, et même entre le pôle boréal et le parallèle de colatitude  $\delta_0$ ; pour  $\delta = \delta_0$ , on a en effet  $\delta' = \frac{\pi}{2}$ , et  $\frac{\sin \delta}{a} \frac{da}{d\delta}$  devient  $-\cos \delta_0$ , résultat négatif, tandis que pour  $\delta = 0$  la même quantité devient  $n - 1$ , résultat positif.

Lorsque  $n$  se trouvera peu supérieur à l'unité, il pourra arriver cependant que, après avoir passé dans l'hémisphère boréal par le maximum dont nous venons de parler,  $a$  passe ensuite dans l'hémisphère austral par un minimum, puis par un nouveau maximum, avant de reprendre au pôle austral la valeur zéro.

117. Lagrange a proposé de profiter de l'indétermina-

tion des deux paramètres  $n$  et  $\delta_0$  ainsi que de celle de la position du méridien dont la projection est rectiligne, pour faire en sorte que  $a$  varie le plus lentement possible, sur le méridien et sur le parallèle, dans le voisinage du lieu principal de la contrée dont on veut faire la carte. On remplira la première condition en faisant coïncider le méridien dont la projection est rectiligne avec celui du lieu considéré, car la dérivée de  $a$  par rapport à  $m$  s'annule pour  $a = 0$ . Nous pouvons maintenant annuler la valeur de la dérivée première de  $a$  par rapport à  $\delta$  sur le méridien; il suffit pour cela de considérer  $l$ , dans les deux dernières formules, comme représentant la latitude du lieu considéré; alors la dérivée seconde s'annulera aussi si l'on prend

$$n = \sqrt{1 + \cos^2 l_\mu}.$$

Ayant ainsi trouvé  $n$ , on calculera  $l_\mu$  au moyen de la formule

$$\operatorname{tang} \frac{l_\mu}{2} = \frac{\sin l_\mu}{n};$$

puis on aura, pour déterminer  $\delta_0$ ,

$$\operatorname{tang} \frac{\delta_0}{2} = \operatorname{tang} \frac{\delta_\mu}{2} \left( \cot \frac{\delta_\mu}{2} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Par exemple, si le lieu principal se trouve sur l'équateur, il viendra

$$l_\mu = 0, \quad n = \sqrt{2}, \quad l_\mu = 0, \quad \delta_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi l'équateur aura alors sa projection rectiligne et le système de projection se trouvera défini par

$$m' = m\sqrt{2}, \quad \operatorname{tang} \frac{\delta'}{2} = \left( \operatorname{tang} \frac{\delta}{2} \right)^{\sqrt{2}}$$

(Tableaux VII).

118. Occupons-nous plus particulièrement du groupe de projections autogonales à méridiens circulaires auquel appartient celle que nous venons de considérer, c'est-à-dire de celui dans lequel on a  $\delta_0 = \frac{\pi}{2}$  (Tableaux VI et XLVII). Elles offrent par rapport à l'équateur la même symétrie sur la carte que sur le globe, de sorte que, pour étudier la déformation produite, il suffit de faire varier  $\delta$  de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ . Si  $n$  est plus petit que 1,  $a$  ira constamment en diminuant, sur chaque méridien, de l'infini à  $\frac{n}{2} \sec^2 \frac{m'}{2}$ . Pour les valeurs de  $n$  peu supérieures à l'unité,  $a$  augmentera d'abord à partir de zéro, passera par un maximum, puis diminuera jusqu'à la même limite  $\frac{n}{2} \sec^2 \frac{m'}{2}$ ; enfin, pour toutes les autres valeurs de  $n$ ,  $a$  augmentera constamment de zéro à cette limite. Par exemple, sur le premier méridien, pour  $n < 1$  et  $n = 1$ ,  $a$  diminue du pôle à l'équateur, où il est égal à  $\frac{n}{2}$ ; pour  $n = 1, 1$ ,  $a$  varie de 0 à  $\frac{n}{2}$ , mais en passant par un maximum qui se produit pour une valeur de  $\delta$  comprise entre 0 et 15°; le maximum a lieu entre les parallèles de 15° et de 30° de colatitude pour  $n = 1, 2$ , entre ceux de 30° et de 45° pour  $n = 1, 3$ , entre ceux de 60° et de 75° pour  $n = 1, 4$ ; enfin le maximum n'existe plus pour  $n = 1, 5$  ni pour les valeurs plus fortes de  $n$ .

SECONDE SÉRIE DE PROJECTIONS SPHÉRIQUES  
RECTANGULAIRES.

119. On peut former une seconde série de projections sphériques rectangulaires, en prenant, comme parallèles de la carte, les méridiens de la première série, c'est-

à-dire toutes les circonférences passant par deux points donnés, et comme méridiens les parallèles de la première série, c'est-à-dire les circonférences trajectoires orthogonales des premières. Sur ce nouveau canevas, considérons des angles  $l''$ ,  $m''$  et  $\varphi'$ , définis respectivement de la même manière que  $m'$ ,  $l'$  et  $\varphi$  sur l'ancien; appelons  $\delta''$ ,  $\mu''$  les compléments des deux premiers; enfin continuons à désigner par  $r$  le rayon d'un parallèle quelconque de la carte, par  $s$  sa distance au centre de la figure, par  $R$  et  $S$  les quantités analogues pour un méridien; nous aurons par analogie, en prenant pour unité la demi-distance des deux points donnés,

$$\begin{aligned} r &= \operatorname{cosec} l'', & s &= \cot l'', \\ R &= \cot m'', & S &= \operatorname{cosec} m'', \\ \operatorname{tang} \frac{\varphi'}{2} &= \operatorname{tang} \frac{l''}{2} \operatorname{tang} \frac{m''}{2}, \\ h &= R \left( \frac{d\varphi}{dl''} \right) \frac{dl''}{dl}, & k &= \frac{r}{\cos l} \left( \frac{d\varphi}{dm''} \right) \frac{dm''}{dm}, \end{aligned}$$

d'où résulte

$$h = \frac{\sin \varphi'}{\sin l'' \operatorname{tang} m''} \frac{dl''}{dl}, \quad k = \frac{\sin \varphi'}{\cos l \sin l'' \sin m''} \frac{dm''}{dm}.$$

### *Seconde série de projections sphériques autogonales.*

120. La condition  $h = k$  donne ici

$$\cos l \frac{dl''}{dl} = \sec m'' \frac{dm''}{dm} = n,$$

$n$  étant une constante arbitraire, d'où l'on conclut

$$l'' = n \left( \log \cot \frac{\delta}{2} - \log \cot \frac{\delta_0}{2} \right), \quad \cot \frac{\mu''}{2} = e^{nm};$$

les logarithmes sont pris dans le système népérien ;  $e$  représente ici la base de ce système ;  $\delta_0$  est la colatitude du parallèle qui a sa projection rectiligne ; les longitudes sont comptées à partir du méridien qui a aussi sa projection rectiligne.

Le rapport de longueurs en chaque point est

$$a = \frac{n \sin \varphi'}{\cos l \sin l'' \operatorname{tang} m''} = \frac{n \operatorname{sec} l \cos m''}{1 + \cos l'' \cos m''}.$$

121. Considérons, par exemple, la projection qui correspond à  $n = 1$  ; plaçons un point de l'équateur au centre de la carte et doublons l'échelle de manière que les longueurs puissent être considérées comme conservées en ce point ; il viendra

$$l'' = \log \cot \frac{\delta}{2}, \quad \cot \frac{\mu''}{2} = e^m,$$

$$a = \frac{2 \operatorname{sec} l \cos m''}{1 + \cos l'' \cos m''}.$$

Sur le premier méridien, on a

$$a = \operatorname{sec} l \operatorname{sec}^2 \frac{l''}{2},$$

et sur l'équateur

$$\frac{1}{a} = \operatorname{sec} m'' \cos^2 \frac{m''}{2}.$$

Le premier des trois Tableaux suivants donne, dans sa seconde colonne, les valeurs de  $l''$  qui correspondent aux valeurs de  $l$  inscrites dans la première. Comme l'expression de  $m''$  en fonction de  $m$  est la même que celle de  $l$  en fonction de  $l''$ , le même Tableau donne aussi, dans sa première colonne, les valeurs de  $m''$  qui correspondent à celles de  $m$  inscrites dans la seconde. Dans le deuxième Tableau, on trouve les valeurs de  $a$  pour les

points du premier méridien qui ont des latitudes multiples de  $15^\circ$  et, dans le troisième, les valeurs de l'inverse de  $a$  pour les points de l'équateur qui ont des longitudes multiples aussi de  $15^\circ$ .

$l$ ou $m''$ .	$l''$ ou $m$ .
$0^\circ 0' 0''$	$0^\circ 0' 0''$
14.49.50	15. 0. 0
15. 0. 0	15.10.30
28.43. 0	30. 0. 0
30. 0. 0	31.28.20
40.58.40	45. 0. 0
45. 0. 0	50.29.10
51.19.30	60. 0. 0
59.46.20	75. 0. 0
60. 0. 0	75.27.30
66.30.50	90. 0. 0
75. 0. 0	116.10.10
85. 3. 0	180. 0. 0
89.47.10	360. 0. 0
90. 0. 0	$\infty$

$m = 0.$	
$l$	$a.$
$0^\circ$	
0.....	1,000
15.....	1,054
30.....	1,246
45.....	1,729
60.....	3,197
75.....	13,825
90.....	$\infty$

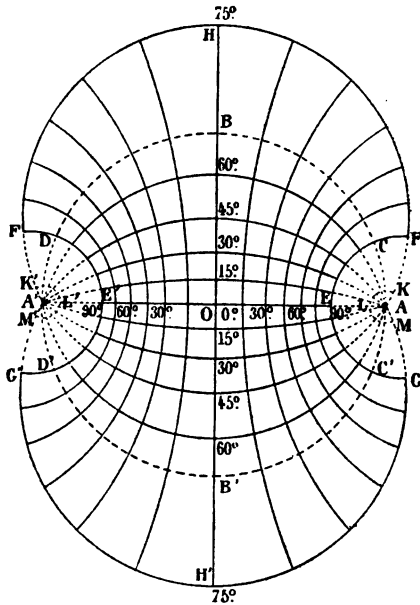
$l = 0.$	
$m.$	$\frac{1}{a}.$
$0^\circ$	
0.....	1,000
15.....	1,017
30.....	1,070
45.....	1,162
60.....	1,300
75.....	1,493
90.....	1,755

Considérons un hémisphère terrestre limité par un méridien, et détachons-en les deux demi-calottes sphériques que sous-tendent les parallèles de  $75^\circ$  de latitude; en construisant, pour la région restante et dans le système de projection que nous étudions maintenant, le canevas des méridiens et des parallèles de  $15^\circ$  en  $15^\circ$  de longitude et de  $15^\circ$  en  $15^\circ$  de lati-



tude, on obtiendra la *fig. 17*. Les constructions s'effectuent facilement à l'aide des nombres fournis par le premier Tableau : A et A' étant les deux points par lesquels doivent passer les circonférences sur lesquelles se projettent les parallèles, et BB' étant perpendicu-

Fig. 17.



laire à AA' en son milieu O, si l'on mène en A une droite faisant avec BB' un angle égal à  $l''$ , le sommet de cet angle donnera le centre de la projection du parallèle de latitude  $l$ . Décrivons aussi le cercle ABA'B' sur AB comme diamètre : les extrémités des rayons de ce cercle qui font avec BB' des angles égaux à  $m''$  appartiendront à la projection du méridien de longitude  $m$ , et le centre de cette projection sera à l'intersection du prolongement

de  $AA'$  avec la tangente à  $ABA'B'$  en l'un des points ainsi obtenus.

Le contour de la carte est formé en partie par les arcs  $FEG$ ,  $F'E'G'$ , projections des deux portions du méridien qui limitent l'hémisphère, et par les arcs  $FHF'$ ,  $GH'G'$ , projections des deux demi-parallèles de  $75^\circ$  de latitude. Pour  $m = 90^\circ$ , on a  $m' = 66^\circ 30' 50''$ ; cette dernière valeur est donc celle de l'angle  $AOC$ . C'est aussi pour  $l = 66^\circ 30' 50''$  que l'on a  $l'' = 90^\circ$ ; les arcs  $CBD$ ,  $C'B'D'$ , tracés en gros traits pointillés, sont donc les projections de deux demi-parallèles très voisins des cercles polaires. Si, au lieu de limiter la région aux parallèles de  $75^\circ$ , on allait jusqu'à ceux de  $85^\circ 3'$ , la carte couvrirait tout le plan, à l'exception de la portion qui est intérieure aux cercles  $FEG$ ,  $F'E'G'$ , car c'est pour  $l = 85^\circ 3'$  que l'on a  $l'' = 180^\circ$ ; si l'on continuait au delà des parallèles de  $85^\circ 3'$ , il y aurait recouvrement. Tous les méridiens, au contraire, peuvent être placés sur la carte; ainsi cette dernière serait limitée à droite et à gauche par les deux arcs  $KLM$ ,  $K'L'M'$ , s'il s'agissait de la représentation de toute la portion du globe et non plus de la portion d'un hémisphère, comprise entre les deux parallèles de  $75^\circ$ ; ces deux cercles correspondent à  $m = 180^\circ$ ,  $m' = 85^\circ 3'$ .

Évidemment, cette projection, dans laquelle les parallèles ont d'autant plus de longueur sur la carte qu'ils en ont moins sur le globe, est plus curieuse qu'utile; les deux derniers des Tableaux ci-dessus font voir cependant qu'elle serait avantageuse pour la représentation de contrées situées entre les tropiques.

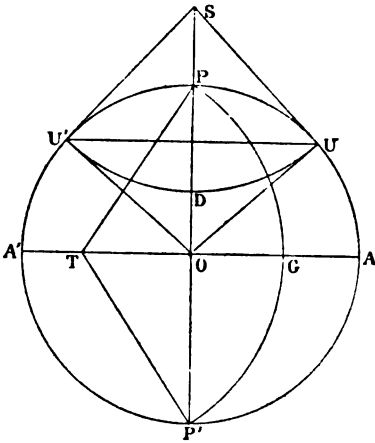
PROJECTIONS SPHÉRIQUES RECTANGULAIRES  
APHYLACTIQUES.

123. *Projection atractozonique* (Tableaux XXVII). — Aucune projection sphérique rectangulaire n'est authalique. Dans celle que nous allons d'abord étudier, nous prendrons le parallèle rectiligne de la carte pour représenter l'équateur et la circonférence décrite sur la ligne des pôles de la carte comme diamètre pour représenter le méridien dont la longitude est de  $90^\circ$ . Nous déterminerons  $l'$  en fonction de  $l$  de manière que, dans l'hémisphère limité par ce méridien, l'aire de la demi-zone comprise entre deux parallèles quelconques se trouve conservée, et nous déterminerons  $m'$  en fonction de  $m$  de manière à conserver l'aire du fuseau formé par deux méridiens quelconques. Ces deux propriétés, à cause desquelles nous donnons à la projection ainsi obtenue le nom de *projection atractozonique*, subsistent dans toutes les projections authaliques; mais, dans ces dernières, les méridiens du globe et ceux de la carte divisent respectivement chaque zone et sa projection en parties proportionnelles, ce qui n'aura pas lieu ici.

Les lettres de la *fig.* 18 ayant les mêmes significations que celles des figures précédentes, nous supposerons le rayon OA ou OP égal à  $\sqrt{2}$ , afin que l'hémisphère et le cercle qui lui sert de projection soient équivalents. La demi-zone à une base limitée par le parallèle de latitude  $l$  a pour surface  $\pi(1 - \sin l)$ . Elle se projette sur la portion de plan PUDU' que la corde UU' décompose en deux segments de cercle : l'un UDU' est la différence entre le secteur OUPU', mesuré par  $\frac{1}{2}\overline{OP}^2 \times \text{arc UPU}'$  ou  $\pi - 2l'$ , et le triangle OUU', qui est mesuré par

$\frac{1}{2} OU \times OU' \sin \widehat{UOU'}$  ou  $\sin 2l'$ ; l'autre est la différence entre le secteur  $SUDU'$  et le triangle  $SUU'$ ; l'angle  $USU'$  est égal à  $2l'$  et le rayon  $SU$  du parallèle à  $\sqrt{2} \cot l'$ , d'où

Fig. 18.



résulte, pour la mesure du segment,  $(2l' - \sin 2l') \cot^2 l'$ . Il suit de là que la première des deux conditions à remplir est

$$\frac{\sin 2l' - 2l' \cos 2l'}{1 - \cos 2l'} = \frac{\pi}{2} \sin l.$$

D'après la seconde, l'aire du segment  $PGP'$  doit être la même que celle du fuseau formé par le premier méridien avec le méridien de longitude  $m$ , ce qui donne

$$\frac{2m' - \sin 2m'}{1 - \cos 2m'} = m.$$

Ces deux équations peuvent encore s'écrire

$$\sin l = \frac{\sin 2l' - 2l' \cos 2l'}{\pi \sin^2 l'}, \quad m = \frac{m'}{\sin^2 m'} - \cot m'.$$

point à un autre, soit en un même point considère différentes perspectives.

On peut d'abord constater que  $a$  et  $\omega$  variant de la distance de l'œil au centre du globe passant par le centre du globe, variant du centre aux bords de la carte.

Sur le pôle,  $a = 1$ ,  $\omega = 0$ ; sur l'équateur,  $r = 1 + \frac{1}{D}$ ,

$\sin \omega = \frac{D-1}{D+1}$ ; enfin sur les bords de la carte

posant que celle-ci comprenne toute la portion de la surface de la Terre qu'il est possible de représenter

qu'il y ait recouvrement,  $\cos \delta = -\frac{1}{D}$ ,  $r = \sqrt{2}$

$a = \frac{D}{D-1}$ ,  $\omega = \frac{\pi}{2}$ . On voit aussi que, la position de l'œil venant à s'écarter de plus en plus de la

surface de la Terre, les rapports  $\frac{D+1}{D+\cos \delta}$ ,  $\frac{D-1}{D+1}$ , dans chacun des

deux termes augmentent de quantités égales, tout en se rapprochant de l'unité, de sorte que  $a$  diminue

et que  $\omega$  et par conséquent  $\frac{a}{b}$  augmentent; quant  $D$  diminue quand  $D$  augmente, puisqu'il est égal au

de  $a^2$  par  $\frac{b}{a}$ . Il nous reste à examiner comment  $b$  varie

soit avec  $\delta$ , soit avec  $D$ , et ensuite comment  $S$  varie

avec  $\delta$  et  $D$ .

Au pôle on a  $b = 1$ , sur l'équateur  $b = \frac{D+1}{D^2}$

sur le parallèle extrême  $b = 0$ . La valeur de  $b$  peut

être exprimée ainsi

$$b = \frac{D^2}{4(D-1)} \left[ 1 - \left( \frac{\frac{2}{D} - D + \cos \delta}{D + \cos \delta} \right)^2 \right].$$

La fraction qui se trouve élevée au carré dans la seconde membre a un dénominateur positif et son numérateur est la somme de deux termes sont du premier degré par rapport à  $\cos \delta$ .

l'arc méridien  
l'ence  
diam  
me, on e  
pe il s'e  
raient m  
ous d'étu  
mination et  
d'un, en  
projection c  
aussi aux pro

rique rectan  
de  $l$  de man  
soit équival  
les surfaces s  
idien donné,  
vent conservée  
déterminer  $m'$  e  
un parallèle dor  
remplies. En  
si obtenue avec  
divers mo  
deux des proj  
méridien princip  
des pôles de la  
le diamètre perp  
le rayon de la ci  
chaque point,  
est

$$\frac{dl}{dl} = \frac{dm'}{dm}$$

En calculant, à l'aide de la première, les valeurs de  $l$  qui correspondent à un nombre suffisant de valeurs de  $l'$ , on pourra construire une Table qui, réciproquement, fera connaître les valeurs de  $l'$  correspondant à des valeurs donnés de  $l$ . La seconde équation permettra de résoudre la même question relativement à  $m$  et  $m'$ .

Des deux équations, il est facile de tirer les expressions des dérivées  $\frac{dl'}{dl}$ ,  $\frac{dm'}{dm}$ ; si on les introduit dans les formules du n° 113, qui donnent les valeurs de  $h$  et  $k$  pour les projections sphériques rectangulaires, il vient

$$h = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{\cos l \sin l' \operatorname{tang} l' \sin \varphi}{(2l' - \sin 2l') \sin m'},$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin m' \sin \varphi}{\cos l \operatorname{tang} l' (1 - m' \cot m')};$$

ou bien encore

$$a = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{\cos l \operatorname{tang} l'}{2l' - \frac{\pi}{2} \sin l} \frac{1}{1 + \cos l' \cos m'},$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cos l'}{\cos l} \frac{1}{1 - m \cot m'} \frac{1}{1 + \cos l' \cos m'};$$

en chaque point,  $a$  sera égal à la plus grande de ces deux quantités, qui est tantôt  $h$ , tantôt  $k$ , et  $b$  à la plus petite. Au centre de la carte, on a  $h = \frac{3\pi}{8\sqrt{2}}$ ,  $k = \frac{3}{2\sqrt{2}}$ , d'où  $S = \frac{9}{32} \pi$ . Si l'on veut pouvoir regarder les surfaces comme conservées en ce point, il faut donc multiplier les expressions ci-dessus de  $h$  et  $k$  par  $\frac{4}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ . C'est ce que nous avons fait pour obtenir les nombres des Tableaux XXVII.

En écartant la condition que le méridien principal se trouve représenté par la circonférence décrite sur la ligne des pôles de la carte comme diamètre, au lieu d'une seule projection atractozonique, on en obtiendrait tout un groupe, et dans ce groupe il s'en trouverait certainement dont les altérations seraient moindres que celles de la projection que nous venons d'étudier. Enfin on augmenterait encore l'indétermination et l'on introduirait deux paramètres au lieu d'un, en ne fixant pas d'avance le parallèle dont la projection est rectiligne. Cette remarque s'applique aussi aux projections suivantes.

124. Dans une projection sphérique rectangulaire, au lieu de déterminer  $l'$  en fonction de  $l$  de manière que la projection de chaque zone lui soit équivalente, on peut faire en sorte que le rapport des surfaces soit constamment égal à 1 le long d'un méridien donné, ou bien encore que les longueurs se trouvent conservées sur ce méridien. Pareillement, on peut déterminer  $m'$  en fonction de  $m$  de manière que, sur un parallèle donné, les conditions analogues se trouvent remplies. En combinant chaque expression de  $l'$  ainsi obtenue avec l'une des expressions de  $m'$ , on formera divers modes de projection dont chacun possédera deux des propriétés énoncées.

Continuons à représenter le méridien principal par la circonférence décrite sur la ligne des pôles de la carte comme diamètre, l'équateur par le diamètre perpendiculaire à cete ligne, et appelons  $R$  le rayon de la circonférence. Le rapport de surfaces en chaque point, dans une projection sphérique quelconque, est

$$S = R^2 \frac{\cos l'}{\cos l} \frac{1}{(1 + \cos l' \cos m')^2} \frac{dl'}{dl} \frac{dm'}{dm}.$$



Proposons-nous de faire en sorte qu'il reste égal à l'unité tout le long du premier méridien. Pour  $m = 0$ , on a  $m' = 0$  et la dérivée de  $m'$  par rapport à  $m$  prend une valeur connue  $n$  dépendant de la nature de la fonction de  $m$  qui aura été adoptée d'autre part pour  $m'$ . La condition est donc

$$nR^2 \frac{\cos l' dl'}{(1 + \cos l')^2} = \cos l dl,$$

d'où résulte

$$\sin l = \frac{nR^2}{2} \left( 1 - \frac{1}{3} \tan^2 \frac{l'}{2} \right) \tan \frac{l'}{2};$$

d'ailleurs, cette équation doit être satisfaite si l'on y fait en même temps  $l = 0$ ,  $l' = 0$ , afin que chaque pôle soit représenté par un point unique, ce qui donne  $nR^2 = 3$ .

Si l'on veut que le rapport de surfaces soit égal à l'unité le long de l'équateur, il faudra poser

$$n'R^2 \frac{dm'}{(1 + \cos m')^2} = dm,$$

$n'$  étant la valeur que prend la dérivée de  $l'$  par rapport à  $l$  pour  $l = 0$ . On tire de là

$$m = \frac{n'R^2}{2} \left( 1 + \frac{1}{3} \tan^2 \frac{m'}{2} \right) \tan \frac{m'}{2};$$

comme le méridien de  $90^\circ$  de longitude doit être représenté par la circonférence décrite sur la ligne des pôles de la carte comme diamètre, il faut que cette équation soit satisfaite lorsqu'on y fait à la fois  $m = \frac{\pi}{2}$ ,  $m' = \frac{\pi}{2}$ ; on a donc

$$n'R^2 = \frac{3\pi}{4}.$$

On peut réunir les deux conditions; alors le mode de

projection sera défini par les deux relations que nous venons d'obtenir, la première entre  $l'$  et  $l$ , la seconde entre  $m'$  et  $m$ ; de plus,  $n$  se trouvera lié à  $n'$  par la relation

$$nn'R^2 = 4,$$

que l'on obtient, soit en faisant  $l = 0$  et  $\frac{dl'}{dl} = n'$  dans la première équation différentielle, soit en faisant  $m = 0$  et  $\frac{dm'}{dm} = n$  dans la seconde; de là on conclut  $R = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$ .

Les deux équations sont

$$\begin{aligned}\sin l &= \frac{1}{2} \left( 3 - \operatorname{tang}^2 \frac{l'}{2} \right) \operatorname{tang} \frac{l'}{2}, \\ m &= \frac{\pi}{8} \left( 3 + \operatorname{tang}^2 \frac{m'}{2} \right) \operatorname{tang} \frac{m'}{2}.\end{aligned}$$

Quant à  $h$  et  $k$ , ils sont devenus

$$\begin{aligned}h &= \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\cos l (1 + \cos l')^2}{\cos l' (1 + \cos l' \cos m')}, \\ k &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\cos l' (1 + \cos m')^2}{\cos l (1 + \cos l' \cos m')},\end{aligned}$$

et l'on en conclut

$$\begin{aligned}\operatorname{tang} \left( \frac{\pi}{4} \pm \frac{\omega}{2} \right) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\cos l (1 + \cos l')}{\cos l' (1 + \cos m')}, \\ S &= \left[ \frac{1}{2} \frac{(1 + \cos l')(1 + \cos m')}{1 + \cos l' \cos m'} \right]^2.\end{aligned}$$

Dans l'avant-dernière formule, on doit prendre le signe + ou le signe — devant  $\frac{\omega}{2}$ , suivant que le second membre est plus grand ou plus petit que l'unité. Quant

à la dernière, on peut l'écrire

$$S = \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{(1 - \cos l')(1 - \cos m')}{1 + \cos l' \cos m'} \right]^2.$$

Sous cette forme, on voit que l'on a  $S < 1$ , partout ailleurs que sur l'équateur ou sur le premier méridien, et que l'altération de surface augmente avec la longitude et avec la latitude. Le Tableau suivant se rapporte au méridien principal, sur lequel on a  $S = \cos^4 \frac{l'}{2}$ .

$m = 0$		
$l'$ .	$S$ .	$\Sigma$ .
0		
0.....	1,000	1,000
30.....	0,868	1,152
45.....	0,729	1,373
60.....	0,562	1,778
90.....	0,250	4,000

25. Cherchons encore comment  $l'$  doit varier avec  $l$  pour que les aires se trouvent conservées le long du méridien principal. Si l'on désigne par  $n''$  la valeur que prend, pour  $m = \frac{\pi}{2}$ , la dérivée de  $m'$  par rapport à  $m$ , il faudra qu'on ait

$$\cos l \, dl = n'' R^2 \cos l' \, dl',$$

d'où

$$\sin l = n'' R^2 \sin l',$$

avec la condition  $n'' R^2 = 1$ , pour que,  $l$  et  $l'$  devenant en même temps égaux à  $\frac{\pi}{2}$ , le pôle se trouve représenté par un point unique. L'équation se réduit donc à

$$l' = l.$$

Si, à cette équation, nous joignons la suivante

$$m = \frac{\pi}{8} \left( 3 + \operatorname{tang}^2 \frac{m'}{2} \right) \operatorname{tang} \frac{m'}{2},$$

nous savons que les surfaces seront aussi conservées le long de l'équateur; celle-ci a été fournie par l'équation différentielle

$$\frac{dm'}{dm} = \frac{4}{3\pi} (1 + \cos m')^2,$$

laquelle donne  $n'' = \frac{4}{3\pi}$  quand on y fait  $m = \frac{\pi}{2}$ ,  $m' = \frac{\pi}{2}$ ,

$\frac{dm'}{dm} = n''$ ; on tire de là

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{3\pi}.$$

On a ici

$$h = \frac{\sqrt{3\pi}}{2} \frac{1}{1 + \cos l \cos m'}, \quad k = \frac{2}{\sqrt{3\pi}} \frac{(1 + \cos m')^2}{1 + \cos l \cos m'},$$

d'où l'on conclut

$$\operatorname{tang} \left( \frac{\pi}{4} \pm \frac{\omega}{2} \right) = \frac{\sqrt{3\pi}}{4} \operatorname{sec}^2 \frac{m'}{2},$$

$$S = \left( \frac{1 + \cos m'}{1 + \cos l \cos m'} \right)^2.$$

La plus grande altération d'angle a la même valeur en tous les points d'un même méridien; elle est nulle en celui pour lequel on a  $\cos \frac{m'}{2} = \frac{\sqrt[4]{\pi}}{2}$ , et va en augmentant à mesure que l'on s'en écarte soit dans un sens, soit dans l'autre; sur le premier méridien, on a

$$\operatorname{tang} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2} \right) = \frac{4}{\sqrt{3\pi}},$$

et sur le méridien principal

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right) = \frac{\sqrt{3\pi}}{2}.$$

Le rapport de surfaces est plus grand que l'unité partout ailleurs que sur l'équateur ou sur le méridien principal. L'altération augmente avec la latitude; elle diminue, au contraire, quand la longitude augmente, ainsi qu'on peut le voir en écrivant

$$S = \sec^2 l \left( 1 - \frac{2 \sin^2 \frac{l}{2}}{1 + \cos l \cos m'} \right).$$

Sur le premier méridien, où se produisent les plus fortes altérations de surface, on a  $S = \sec^4 \frac{l}{2}$ , d'où résulte le Tableau suivant :

$m = 0$	
$l.$	$S.$
0	
0 . . . . .	1,000
30 . . . . .	1,152
45 . . . . .	1,376
60 . . . . .	1,778
90 . . . . .	4,000

126. Les conditions pour que les aires se trouvent conservées le long du méridien de longitude  $m_0$  et le long du parallèle de latitude  $l_0$  sont respectivement

$$\sin l = A \left[ \frac{\sin l'}{1 + \cos m'_0 \cos l'} - 2 \cot m'_0 \operatorname{arctang} \left( \operatorname{tang} \frac{m'_0}{2} \operatorname{tang} \frac{l'}{2} \right) \right],$$

$$m = B \left[ \frac{4}{\sin 2l_0} \operatorname{arctang} \left( \operatorname{tang} \frac{l'_0}{2} \operatorname{tang} \frac{m'}{2} \right) - \frac{\sin m'}{1 + \cos l'_0 \cos m'} \right],$$

les quantités  $l_0$ ,  $l'_0$ ,  $m_0$ ,  $m'_0$  et les constantes A, B étant

liées entre elles par les quatre relations que l'on obtient en exprimant que la première équation est satisfaite pour  $l = l_0$  avec  $l' = l'_0$ , ainsi que pour  $l = \frac{\pi}{2}$  avec  $l' = \frac{\pi}{2}$ , et la seconde pour  $m = 0$  avec  $m' = 0$ , ainsi que pour  $m = m_0$  avec  $m' = m'_0$ . Quant au rapport de surfaces en chaque point, il est devenu

$$S = \left[ \frac{(1 + \cos m'_0 \cos l')(1 + \cos l'_0 \cos m')}{(1 + \cos l'_0 \cos m'_0)(1 + \cos l' \cos m')} \right]^2.$$

Dans la parenthèse du second membre, le facteur qui varie avec  $l'$  est

$$\frac{1 + \cos m'_0 \cos l'}{1 + \cos l' \cos m'} = 1 + \frac{\cos m'_0 - \cos m'}{\cos m' + \sec l'};$$

on voit donc que sur chacun des méridiens pour lesquels on a  $m < m_0$ , le rapport  $S$  est inférieur à l'unité et augmente de l'équateur au pôle; pour  $m > m_0$ , on a  $S > 1$  et  $S$  augmente du pôle à l'équateur. On verrait d'une manière analogue que, sur les parallèles dont la latitude est inférieure à  $l_0$ ,  $S$  est plus petit que 1 et augmente avec la longitude, tandis que, si  $l$  est plus grand que  $l_0$ ,  $S$  sera plus grand que 1 et d'autant plus grand que la longitude sera plus petite. Ainsi  $S$  atteint un minimum  $S_1$  au centre de la carte, un autre  $S_2$  au pôle, sur le méridien principal; il atteint un maximum  $S_3$  au pôle, sur le premier méridien, enfin un second maximum  $S_4$  à l'intersection de l'équateur avec le méridien principal; et l'on a

$$S_1 = \left[ \frac{(1 + \cos l'_0)(1 + \cos m'_0)}{2(1 + \cos l'_0 \cos m'_0)} \right]^2, \quad S_2 = \frac{1}{(1 + \cos l'_0 \cos m'_0)^2},$$

$$S_3 = \left( \frac{1 + \cos l'_0}{1 + \cos l'_0 \cos m'_0} \right)^2, \quad S_4 = \left( \frac{1 + \cos m'_0}{1 + \cos l'_0 \cos m'_0} \right)^2.$$

127. Considérons toujours les projections sphériques rectangulaires dans lesquelles l'hémisphère se trouve représenté par un cercle entier, et supposons maintenant que l'on veuille développer le premier méridien en vraie grandeur; à cet effet, prenons le rayon OA (*fig. 15*) de la carte égal à  $\frac{\pi}{2}$ . On a vu que, les trois points A', D, U étant en ligne droite, l'angle OA'D est égal à la moitié de  $l'$ ; on a d'ailleurs ici  $OA' = \frac{\pi}{2}$ ,  $OD = l$ ; le triangle rectangle OA'D donnera donc

$$\text{tang} \frac{l'}{2} = \frac{2l}{\pi}.$$

Si l'on veut aussi développer l'équateur en vraie grandeur, on aura (*fig. 16*)  $OG = m$ , et, comme l'angle OPG est égal à la moitié de  $m'$ , le triangle OPG donnera à son tour

$$\text{tang} \frac{m'}{2} = \frac{2m}{\pi}.$$

De ces deux équations il résulte que l'on a

$$\text{tang} \frac{\varphi}{2} = \frac{4lm}{\pi^2},$$

et aussi

$$\frac{dl'}{dl} = \frac{\sin l'}{l}, \quad \frac{dm'}{dm} = \frac{\sin m'}{m},$$

de sorte que  $h$  et  $k$  deviennent

$$h = \frac{\sin \varphi}{l \sin m'}, \quad k = \frac{\sin \varphi}{m \cos l \text{ tang} l'}.$$

Au point de rencontre de l'équateur avec le méridien principal, on a

$$a = 2, \quad b = 1, \quad S = 2, \quad 2\omega = 38^{\circ}57'.$$

128. L'équateur étant toujours développé en vraie grandeur, si l'on fait porter la seconde condition, non plus sur le premier méridien, mais sur le méridien principal, et si l'on veut que les arcs de ce dernier aient pour projections des arcs qui leur soient proportionnels, la relation entre  $m$  et  $m'$  restera la même, mais celle qui existait entre  $l$  et  $l'$  sera remplacée par  $l' = l$ , ce qui donne

$$\operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} = \frac{2m}{\pi} \operatorname{tang} \frac{l}{2}.$$

Il viendra alors

$$h = \frac{\sin \varphi}{\sin l \sin m'}, \quad k = \frac{\sin \varphi}{m \sin l}$$

$$\operatorname{tang} \left( \frac{\pi}{4} \pm \frac{\omega}{2} \right) = \sqrt{\frac{m}{\sin m'}} = \sqrt{\frac{\pi}{4} + \frac{m^2}{\pi}}.$$

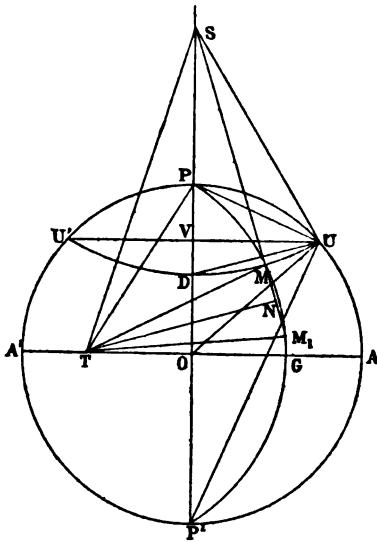
Ce mode de projection se trouve mentionné dans quelques traités de Géodésie sous le nom de *projection stéréographique méridienne modifiée*. (Tableau XXVI.)



**PROJECTIONS SPHÉRIQUES OBLIQUANGLES.**

129. Nous supposons toujours qu'à chaque point du globe correspond un point de la carte et un seul, de sorte que les circonférences qui servent de projections aux méridiens passent toutes par deux points  $P, P'$  (fig. 19), qui sont les projections des deux pôles.

Fig. 19.



Soit  $APA'P'$  la circonférence décrite sur  $PP'$  comme diamètre,  $O$  son centre,  $AA'$  le diamètre perpendiculaire à  $PP'$ ,  $UDU'$  la projection du parallèle de latitude  $l$  ou de colatitude  $\delta$ ,  $S$  le point du prolongement de  $PP'$  qui sert de centre à cette projection,  $V$  le milieu de la corde  $UU'$  commune aux deux circonférences  $APA'P'$ ,

UDU'; soient encore PGP' la projection du méridien de longitude  $m$ , comptée à partir du méridien projeté sur PP', et T le centre de la circonférence PGP'. Nous continuerons à définir cette dernière par l'angle  $m'$  sous lequel elle coupe PP', lequel est égal à l'angle OTP, de sorte que dans le triangle OTP nous aurons comme précédemment, en prenant OP pour unité et en désignant respectivement par R et S le rayon TP et la distance OT,

$$R = \text{coséc}m', \quad S = \cot m', \quad R^2 - S^2 = 1.$$

Quant à la projection UDU' du parallèle, on peut la définir par les deux longueurs  $r, s$ , comme nous l'avons fait jusqu'à présent, ou bien par deux des angles que font entre eux les côtés du triangle OSU. Appelons  $\delta'$  l'angle SOU,  $\delta$  son complément,  $\epsilon$  l'angle OSU, enfin  $\gamma$  l'angle de l'un des rayons OU, SU avec le prolongement de l'autre. Comme on a  $OU = 1$ , le triangle OSU est déterminé par deux des quantités  $r, s, \delta', \epsilon, \gamma$ , et il est facile d'exprimer les trois autres quantités, ainsi que les diverses lignes de la figure, en fonction des deux premières. On a notamment

$$\gamma = \epsilon + \delta', \quad \gamma = \frac{\sin \delta'}{\sin \epsilon}, \quad S = \frac{\sin \gamma}{\sin \epsilon},$$

$$OD = S - r = \frac{\cos \frac{\gamma + \delta'}{2}}{\cos \frac{\epsilon}{2}}, \quad S + r = \frac{\sin \frac{\gamma + \delta'}{2}}{\sin \frac{\epsilon}{2}}.$$

Le rapport des deux parties DP, DP' dans lesquelles la ligne PP' se trouve divisée par la projection du parallèle s'exprime ainsi très simplement au moyen de  $\delta'$  et  $\gamma$ . En effet, ce dernier angle est égal à celui des tangentes en U aux deux circonférences, lequel se trouve décomposé par la corde UU' en deux parties, dont l'une est double de

l'angle  $DUU'$ , et l'autre de l'angle  $PUU'$ ; l'angle  $PUD$  est donc égal à  $\frac{\gamma}{2}$ . Or, des deux angles complémentaires  $PPU$ ,  $P'PU$ , le premier est égal à  $\frac{\delta'}{2}$ ; il vient donc dans les triangles  $DPU$ ,  $DP'U$ ,

$$DU \sin \frac{\gamma}{2} = DP \cos \frac{\delta'}{2}, \quad DU \cos \frac{\gamma}{2} = DP' \sin \frac{\delta'}{2},$$

d'où, en divisant membre à membre et appelant  $\mu$  le rapport cherché,

$$\mu = \operatorname{tang} \frac{\delta'}{2} \operatorname{tang} \frac{\gamma}{2}.$$

L'altération  $\theta$  de l'angle du méridien avec le parallèle est l'excès de l'angle  $SMT$  sur  $\frac{\pi}{2}$ . Pour l'obtenir simplement, remarquons que,  $M_1$  étant le second point d'intersection de  $SM$  avec la circonférence  $PMP'$ , on a

$$SM \times SM_1 = SP \times SP';$$

si  $M$  se déplace en changeant de méridien, mais en restant sur le même parallèle,  $SM$  est constant; donc il en est de même de  $SM_1$ , par conséquent aussi de  $MM_1$ , et enfin de  $MN$ ,  $N$  étant le milieu de  $MM_1$ ; donc la projection  $MN$  du rayon  $TM$  du méridien variable de la carte sur le rayon  $SM$  du parallèle fixe a une longueur constante. Au point  $M$ , cette longueur est exprimée par  $R \sin \theta$ , ou  $\frac{\sin \theta}{\sin m'}$ , et, au point  $U$ , par  $\cos \gamma$ ; il vient donc

$$\sin \theta = \cos \gamma \sin m'.$$

Dans le triangle rectangle  $OST$ , l'angle en  $S$ , que nous appellerons  $\sigma$ , s'obtient immédiatement; car on a

$$\operatorname{tang} \sigma = \frac{S}{s}.$$

Désignons maintenant par  $\varphi$  l'angle OSM, par  $\psi$  l'angle OTM, dont nous avons besoin pour calculer les rapports  $h$  et  $k$ . Le triangle STM donne

$$\sin(\varphi + \sigma) = \frac{R}{TS} \cos \theta, \quad \cos(\psi + \sigma) = \frac{r}{TS} \cos \theta;$$

mais l'on a, dans le triangle OST,

$$TS = \frac{S}{\sin \sigma} = \frac{s}{\cos \sigma};$$

il vient donc

$$\sin(\varphi + \sigma) = \frac{R}{S} \sin \sigma \cos \theta, \quad \cos(\psi + \sigma) = \frac{r}{s} \cos \sigma \cos \theta,$$

ou bien

$$\sin(\varphi + \sigma) = \frac{\sin \sigma \cos \theta}{\cos m'}, \quad \cos(\psi + \sigma) = \frac{\sin \delta' \cos \sigma \cos \theta}{\sin \gamma}.$$

On peut d'ailleurs se contenter de calculer directement l'un des angles  $\varphi$  et  $\psi$ ; on a en effet

$$\psi - \varphi = \theta,$$

car, I étant le point de rencontre de TU avec PP', les deux triangles OIT, ISM ont les angles en I égaux, et, en exprimant que la somme des autres angles est la même de part et d'autre, on obtient la relation que nous venons d'écrire.

Les coordonnées rectangulaires du point M par rapport aux axes OP, OA sont

$$x = R \sin \psi, \quad y = r \sin \varphi.$$

On a maintenant

$$h = R \left( \frac{d\psi}{d\delta} \right), \quad k = \frac{r}{\sin \delta} \left( \frac{d\varphi}{dm} \right).$$

En prenant, par rapport à  $\delta$  et par rapport à  $m$ , les

dérivées des logarithmes des deux membres de chacune des relations que nous avons établies entre les diverses variables, on obtiendra  $\left(\frac{d\psi}{d\delta}\right)$  et  $\left(\frac{d\varphi}{dm}\right)$ , qui figurent dans les valeurs de  $h$  et  $k$ ; mais il est plus simple, pour avoir  $h$ , de faire usage de la formule

$$h = \left(\frac{dr}{d\delta} - \frac{ds}{d\delta} \cos \varphi\right) \sec \theta,$$

qui a été démontrée pour les projections polyconiques et qui s'applique ici, puisque les parallèles ont des projections circulaires. D'ailleurs, comme les méridiens remplissent la même condition, on peut former l'expression de  $k$  en remplaçant, dans celle de  $h$ ,  $\delta$  par  $m$ ,  $r$  par  $R$ ,  $s$  par  $S$ ,  $\varphi$  par  $\psi$ , et divisant par  $\sin \delta$ , ce qui donne

$$k = \left(\frac{dR}{dm} - \frac{dS}{dm} \cos \psi\right) \frac{\sec \theta}{\sin \delta}.$$

La projection de  $TM$  sur  $OT$  étant égale à  $OT$  plus la projection de  $SM$ , on a

$$R \cos \psi = S - r \sin \varphi;$$

substituant à  $\cos \psi$ , dans l'expression de  $k$ , la valeur qui résulte de cette dernière équation, et observant que  $R \frac{dS}{dm} - S \frac{dR}{dm}$  est nul puisque  $R^2 - S^2$  est constant, on a

$$k = - \frac{r \sec \varphi}{R \sin \delta \cos \theta} \frac{dS}{dm},$$

ou encore

$$k = \frac{r \sin \delta \sec \theta}{\sin \delta \sin m'} \frac{dm'}{dm}.$$

L'expression de  $h$  peut s'écrire

$$h = \frac{d(s-r)}{d\delta} + 2 \frac{ds}{d\delta} \sin^2 \frac{\varphi}{2};$$

cherchons, en particulier, ce qu'elle devient, ainsi que celle de  $k$ , sur le parallèle rectiligne de la carte, que nous ferons, par exemple, correspondre à l'équateur. Appelons  $A$  la valeur que prend, pour  $l = 0$ , la dérivée de  $OD$  ou  $s - r$  par rapport à  $l$ , et  $B$  la limite vers laquelle tend le rapport de  $\frac{ds}{d\delta}$  à  $2r^2$  lorsque  $l$  tend vers zéro; comme en même temps  $r\varphi$  tend vers  $OG$  ou  $\text{tang} \frac{m'}{2}$ , il viendra, en chaque point de l'équateur,

$$h = A + B \text{tang}^2 \frac{m'}{2}, \quad k = \frac{1}{2} \text{séc}^2 \frac{m'}{2} \frac{dm'}{dm}.$$

La condition pour que les aires se trouvent conservées le long de cette ligne serait donc

$$\left( A + \frac{B}{3} \text{tang}^2 \frac{m'}{2} \right) \text{tang} \frac{m'}{2} = m.$$

130. Il y a une infinité de *projections sphériques atraxoniques*. Si l'on suppose le méridien de  $90^\circ$  de longitude représenté par la circonférence décrite sur la ligne des pôles comme diamètre, ces projections sont fournies par les équations suivantes :

$$2l' + \sin 2l' - (1 + \cos 2l') \frac{2\varepsilon - \sin \varepsilon}{1 - \cos 2\varepsilon} = \pi \sin l,$$

$$\frac{2m' - \sin 2m'}{1 - \cos 2m'} = m;$$

la première laisse encore indéterminée une des deux quantités  $l'$ ,  $\varepsilon$  en fonction de  $l$ ; quant à la seconde, elle est incompatible avec la condition de conservation des aires le long de l'équateur, ce qui prouve qu'il n'existe pas de projection sphérique authalique.

131. *Projection de Nicolosi* (Tableaux XXXII). —

Sur cette projection, l'équateur et le premier méridien se trouvent développés en ligne droite et en vraie grandeur ; le méridien principal est représenté par la circonférence décrite sur la ligne des pôles de la carte comme diamètre ; enfin les arcs de ce méridien et les arcs correspondants de la circonférence sont proportionnels. En d'autres termes, les parallèles de la carte ne diffèrent pas de ceux de la première projection du P. Fournier (n° 109), et les méridiens sont ceux que nous avons déjà rencontrés dans les projections sphériques rectangulaires où l'on veut conserver les longueurs des arcs d'équateur ; on a donc ici, en prenant le rayon de la carte égal à  $\frac{\pi}{2}$ ,

$$l' = l, \quad \delta' = \delta, \quad \epsilon = \gamma - \delta,$$

$$\mu = \frac{\delta}{\pi - \delta}, \quad \text{tang} \frac{\gamma}{2} = \frac{\delta}{\pi - \delta} \cot \frac{\delta}{2},$$

$$r = \frac{\pi \sin \delta}{2 \sin \epsilon}, \quad s = \frac{\pi \sin \gamma}{2 \sin \epsilon},$$

$$\text{tang} \frac{m'}{2} = \frac{2m}{\pi}, \quad R = \frac{\pi}{2} \text{coséc} m', \quad S = \frac{\pi}{2} \cot m',$$

$$\sin \theta = \cos \gamma \sin m', \quad \text{tang} \sigma = \frac{S}{s},$$

$$\sin(\varphi + \sigma) = \frac{\sin \sigma \cos \theta}{\cos m'}, \quad \psi = \varphi + \theta,$$

$$h = \left( 1 + 2 \frac{\frac{\pi}{2} s \cos l - r}{\frac{\pi}{2} \sin l - l} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \text{séc} \theta,$$

$$k = \frac{r \sin \varphi}{m \cos l \cos \theta}.$$

**PROJECTIONS MÉRISPHÉRIQUES.**

132. Nous appelons *projections mérisphériques* celles dans lesquelles les méridiens se trouvent représentés par des circonférences ayant leurs centres en ligne droite, quelles que soient d'ailleurs les projections des parallèles. Cette classe de projections diffère ainsi de celle des projections polyconiques, en cela seulement que les méridiens y jouent le rôle que les parallèles jouaient dans ces dernières, et, pourvu qu'on ait égard à cette modification, les mêmes formules seront applicables. On aura donc ici, en appelant  $R$  le rayon de la projection du méridien de longitude  $m$ ,  $S$  la distance de son centre à un point fixe de la ligne des centres,  $\psi$  l'angle que fait avec cette ligne le rayon aboutissant à la projection du point de latitude  $l$  et de longitude  $m$ ,

$$\text{tang } \theta = \frac{R \left( \frac{d\psi}{dm} \right) + \frac{dS}{dm} \sin \psi}{\frac{dR}{dm} - \frac{dS}{dm} \cos \psi},$$

$$h = R \left( \frac{d\psi}{dl} \right), \quad k = \left( \frac{dR}{dm} - \frac{dS}{dm} \cos \psi \right) \frac{\sec \theta}{\cos l}.$$

**PROJECTIONS MÉRISPHÉRIQUES RECTANGULAIRES.**

133. Pour que les méridiens et les parallèles de la carte se coupent à angle droit, il suffit que le numérateur de  $\text{tang } \theta$  s'annule; si l'on désigne par  $L$  une fonction arbitraire de  $l$ , et par  $M$  une fonction de  $m$  telle que l'on ait

$$\frac{dM}{M} = \frac{dS}{R},$$



la condition sera

$$\operatorname{tang} \frac{\psi}{2} = \frac{L}{M};$$

on voit qu'elle laisse  $R$  et  $S$  indéterminés en fonction de  $m$ . Inversement, si l'on se donne  $\operatorname{tang} \frac{\psi}{2}$  égal au produit d'une fonction de  $l$  par une fonction de  $m$ ,  $R$  ou  $S$  restant arbitraire, on pourra choisir  $S$  ou  $R$  de manière que la projection ait son canevas orthogonal. On peut astreindre les méridiens à avoir deux points communs sur la carte comme sur le globe; alors on retombera sur les projections sphériques rectangulaires. La recherche des projections hémisphériques autogonales ramènerait de même aux projections sphériques autogonales.

#### PROJECTIONS MÉRISPHÉRIQUES AUTHALIQUES

134. Égalant à l'unité le produit  $hk \cos \theta$ , puis intégrant par rapport à  $l$ , on trouve

$$R \left( \frac{dR}{dm} \psi - \frac{dS}{dm} \sin \psi \right) + N = \sin l,$$

$N$  désignant une fonction arbitraire de  $m$ ; les expressions de  $N$ ,  $R$ ,  $S$  en fonction de  $m$  ayant été choisies à volonté, cette équation deviendra une relation entre  $l$ ,  $m$  et  $\psi$  exprimant la condition qui doit se trouver remplie pour que la projection soit authalique.

Supposons que les méridiens de la carte soient assujettis à passer par deux points fixes, dont nous représenterons la distance par  $2c$ ; appelons alors  $m'$  la longitude modifiée, ou l'angle sous lequel la projection du méridien de longitude  $m$  coupe le méridien rectiligne de la carte; nous aurons, comme plus haut,

$$R = c \operatorname{coséc} m', \quad S = c \operatorname{cot} m',$$

et la condition sera devenue

$$c^2 \frac{\sin \psi - \psi \cos m'}{\sin^3 m'} \frac{dm'}{dm} + N = \sin l.$$

Supposons de plus que l'équateur de la carte soit rectiligne, c'est-à-dire que, pour  $l = 0$ , on ait  $\psi = 0$ , quel que soit  $m$ ; la fonction  $N$  devra se réduire à zéro.

Supposons encore que les deux points fixes dont la distance rectiligne est  $2c$  doivent servir de projections aux deux pôles. ou que, pour  $l = \frac{\pi}{2}$ , on ait  $\varphi = m'$ , quel que soit  $m$ ;  $m'$  se trouvera déterminé en fonction de  $m$  par l'équation

$$c^2 \frac{1 - m' \cot m'}{\sin^2 m'} \frac{dm'}{dm} = 1,$$

laquelle donne

$$\frac{c^2}{2} \frac{2m' - \sin 2m'}{1 - \cos 2m'} = m.$$

Enfin, si la circonférence décrite sur la ligne des pôles de la carte comme diamètre doit correspondre au méridien de  $90^\circ$  de longitude, c'est-à-dire si l'on doit avoir en même temps  $m = \frac{\pi}{2}$ ,  $m' = \frac{\pi}{2}$ , il faudra prendre  $c^2 = 2$ .

Toutes ces conditions réunies détermineront un système de projection unique, défini par les deux équations

$$\frac{2m' - \sin 2m'}{1 - \cos 2m'} = m, \quad \frac{\sin \psi - \psi \cos m'}{\sin m' - m' \cos m} = \sin l;$$

la première exprime que les aires des fuseaux formés par les méridiens ne sont pas altérées; on aurait pu la poser *a priori*.

Il n'existe pas de projection hémisphérique rectangulaire aouthalique.

## PROJECTIONS NON CLASSÉES.

135. Parmi les systèmes qui ont été proposés jusqu'à présent, trois seulement restent en dehors de la classification que nous avons adoptée, parce que ni les parallèles ni les méridiens n'y ont leurs projections rectilignes ou circulaires.

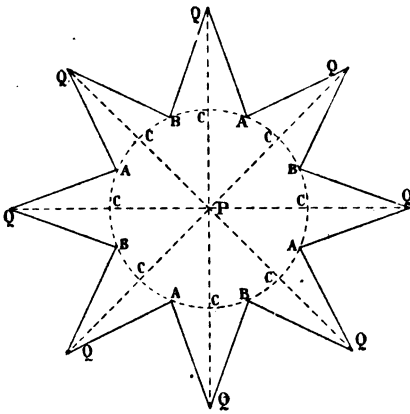
Ce sont d'abord la *projection de Schmidt* (Tableaux XXXVI) et la *projection autogonale de Lit-trow* (Tableaux VIII), qui proposées, l'une en 1803, l'autre en 1833, n'ont jamais été appliquées. Nous déduirons les formules qui leur sont propres de celles qui sont communes à toutes les projections.

Le troisième système, dit *projection polyconique équidistante*, est employé aux États-Unis pour représenter des surfaces dont l'étendue ne surpasse pas 1 degré carré. On construit d'abord le canevas comme dans la projection polyconique ordinaire ; mais les parallèles ainsi obtenus ne sont que provisoires ; sur les méridiens, qui eux seront conservés, on porte, à partir d'un parallèle moyen, des longueurs égales aux arcs de méridien du globe ; les extrémités de ces longueurs déterminent le tracé des parallèles définitifs. Dans les circonstances où l'on en fait usage, ce mode de projection ne peut produire que des altérations insignifiantes ; mais il en serait de même de beaucoup d'autres moins compliqués.

136. Pour ne rien omettre, nous devons mentionner les *projections étoilées*, qui sont destinées à la représentation du globe entier sur une seule carte. Le canevas de l'hémisphère nord y est tracé dans le système de l'une des projections centrales et couvre, par conséquent, tout

l'intérieur d'un cercle  $\alpha AB\beta$  (*fig. 20 et 21*), dont le centre  $P$  sert de projection au pôle boréal. Si l'on continuait d'appliquer ce système à l'autre hémisphère, on se trouverait conduit à prendre, comme projections des parallèles, des circonférences  $\Delta'D'E'\epsilon'$ ,  $\Delta DE\epsilon$ ,  $\varpi Q\rho$ , d'autant plus grandes que les parallèles eux-mêmes sont plus petits, et le pôle austral serait remplacé par la plus grande,  $\varpi Q\rho$ . Pour éviter cet inconvénient, on con-

Fig. 20.



sidère l'hémisphère sud comme partagé en demi-fuseaux que l'on projette séparément sur des triangles isocèles à base circulaire convexe, tels que  $QACB$ . Pour chacun, le demi-méridien médian est tracé dans le prolongement  $CQ$  du demi-méridien correspondant  $PC$  de l'hémisphère nord et jusqu'à sa rencontre avec la circonférence limite  $\varpi Q\rho$  (*fig. 21*): le point de rencontre  $Q$  constitue, pour le fuseau considéré, la projection du pôle austral. On obtient les projections  $QA, QG, QG', QB$  des autres demi-méridiens du demi-fuseau en joignant la projection  $Q$  du pôle aux points de l'équateur  $A, G, G', B$ , où viennent aboutir

les demi-méridiens correspondants PA, PG, PG', PB de l'hémisphère nord. Quant aux projections des parallèles, ce sont des arcs D'F'E', DFE des circonférences  $\delta$ D'E' $\epsilon'$ ,  $\delta$ DE $\epsilon$ , qui, dans le premier système, auraient servi de projections aux parallèles entiers.

En cherchant ainsi à représenter toute la surface terrestre sur une carte unique, on ne pouvait éviter l'inconvénient signalé tout à l'heure qu'en tombant dans un autre; celui des projections étoilées consiste dans la disjonction des demi-fuseaux, qui se trouvent juxtaposés sur le globe.

Dans le système proposé par le géographe allemand Petermann, le canevas de l'hémisphère boréal est tracé d'après la projection de Guillaume Postel (n° 69), et les fuseaux de l'hémisphère sud sont au nombre de huit, tous égaux entre eux. C'est une modification heureuse de la projection à parallèles brisés, indiquée par Jäger en 1865; dans celle-ci, chaque parallèle était représenté par le contour d'un octogone non régulier.

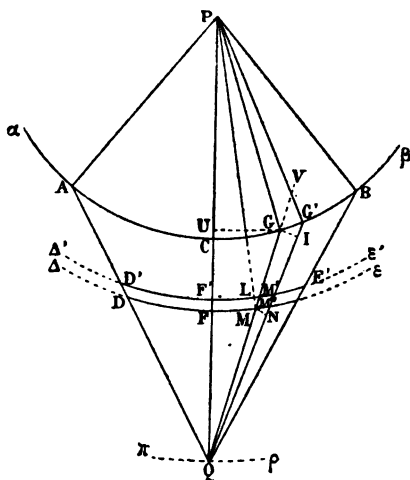
On pourrait aussi construire des projections étoilées en traçant le canevas de l'hémisphère nord, d'après le système d'une projection conique non centrale.

137. Dans l'évaluation des altérations produites par une projection étoilée, nous n'avons pas à nous occuper de l'hémisphère nord, qui se trouve représenté d'après l'un des systèmes déjà étudiés. Soient M (*fig. 21*) la projection d'un point quelconque d'un fuseau de l'hémisphère sud, M', M'' les points de rencontre des projections QG, DFG de son méridien et de son parallèle avec celles D'F'G', QG' du parallèle et du méridien infiniment voisins; abaissons GU perpendiculaire sur PQ; prolongeons QG suivant GV; tirons PM, qui coupe en L l'arc D'F'E'; enfin, décrivons de Q comme centre

et dans l'angle  $GQG'$  les deux arcs de cercle infiniment petits  $MN$ ,  $GI$ .

Suivant que la projection adoptée pour l'hémisphère nord est centrale ou non, l'angle  $CPG$  est égal à la longitude  $m$  comptée à partir du méridien médian, ou à son produit par une constante; supposons, par exemple, le premier cas. Le rayon  $PM$ , que nous appellerons  $r$ ,

Fig. 21.



est une fonction connue de la colatitude  $\delta$ , comptée à partir du pôle boréal, ou de la colatitude  $\delta'$ , égale à  $\pi - \delta$ , comptée à partir du pôle austral. Le rayon  $PG$  et la distance  $PQ$  sont respectivement les valeurs  $r_e$ ,  $r_p$  que prend  $r$  pour  $\delta = \frac{\pi}{2}$  pour  $\delta = \pi$ . Cela posé, comme on a, dans le triangle  $PGU$ ,  $UG = r_e \sin m$ ,  $UP = r_e \cos m$ , d'où résulte  $QU = r_p - r_e \cos m$ , si l'on désigne par  $\mu$  l'angle de la projection  $QG$  du méridien considéré avec la projection  $QC$  du premier méridien, le triangle  $QGU$

donnera à son tour

$$\operatorname{tang} \mu = \frac{r_e \sin m}{r_p - r_e \cos m}.$$

L'altération  $\theta$  de l'angle du méridien avec le parallèle est représentée sur la figure par l'angle PMG, qu'il est facile d'obtenir dans le triangle PQM après avoir calculé l'angle  $\mu$ . Il vient

$$\sin \theta = \frac{r_p}{r} \sin \mu.$$

Sur l'équateur, en particulier, l'altération correspondante  $\Theta$ , qui n'est autre que l'angle PGV, se déduira de la formule

$$\sin \Theta = \frac{r_p}{r_e} \sin \mu.$$

On tire encore du triangle PQM, en désignant l'angle CPM par  $\varphi$  et la longueur QM par  $t$ ,

$$\varphi = \theta - \mu, \quad t = r \frac{\sin \varphi}{\sin \mu}.$$

Si l'on prend PQ pour axe polaire, et, pour pôle, soit le point P, soit le point Q, on connaîtra donc les coordonnées  $\varphi$  et  $r$ , ou  $\mu$  et  $t$ , du point M.

Il nous reste à obtenir les expressions des rapports de longueurs  $h$  et  $k$  sur le méridien et sur le parallèle. Dans le triangle rectangle infiniment petit LMM', l'angle en M est égal à  $\theta$  et le côté LM à la différentielle de  $r$ ; on a donc  $MM' = \sec \theta dr$ , d'où

$$h = \frac{dr}{d\delta} \sec \theta.$$

On trouvera  $k$  en divisant  $MM''$  par  $\sin \delta' dm$ ; or le triangle  $MM''N$  donne  $MM'' = MN \sec \theta$ ; d'un autre côté, le rapport de MN à GI est le même que celui de QM

à QG ou que celui des distances  $r \sin \varphi$ ,  $r_e \sin m$  des points M, G à la droite PQ; enfin, dans le triangle rectangle GIG', on a  $GI = GC' \cos \Theta = r_e \cos \Theta dm$ . Il vient donc

$$k = \frac{r}{\sin \delta'} \frac{\cos \Theta}{\sin m} \frac{\sin \varphi}{\cos \theta}.$$

L'altération  $\theta$  augmente, à mesure que le point auquel elle se rapporte s'éloigne, soit du pôle austral, soit du premier méridien. Si l'on compare les valeurs de  $h$  et de  $k$  à ce qu'elles auraient été dans le cas où l'on aurait continué pour l'hémisphère sud le mode de projection adopté pour l'hémisphère nord, on constate que la première se trouve amplifiée dans le rapport de  $\sec \theta$  à l'unité et la seconde diminuée dans le rapport de  $\cos \Theta \sin \varphi$  à  $\cos \theta \sin m$ ; ce dernier rapport est aussi celui dans lequel se trouve réduite la valeur de S.

Sur l'équateur, on a, en affectant de l'indice  $e$  la valeur que prend la dérivée de  $r$  par rapport à  $\delta$  pour

$$\delta = \frac{\pi}{2},$$

$$\theta = \Theta, \quad h = \left( \frac{dr}{d\delta} \right)_e \sec \Theta, \quad k = r_e.$$

Les angles  $\varphi$  et  $\delta'$  s'annulent lorsqu'il s'agit du pôle austral, mais le rapport de leurs sinus conserve une valeur déterminée que l'on déduit facilement de l'équation qui donne  $\theta$  en fonction de  $r$  et de  $\mu$ , et de la relation  $\varphi = \theta - \mu$ . En faisant usage d'une notation analogue à celle qui vient d'être employée, on trouve, pour les limites vers lesquelles tendent  $\theta$ ,  $h$  et  $k$  lorsqu'on se rapproche indéfiniment du pôle en restant sur le méridien de longitude  $m$ ,

$$\theta = \mu, \quad h = \left( \frac{dr}{d\delta} \right)_p \sec \mu, \quad k = h \frac{\tan \mu \cos \Theta}{\sin m}.$$



Sur le premier méridien, ce sont les angles  $m$  et  $\varphi$  qui s'annulent, mais on peut aussi obtenir la limite du rapport de leurs sinus ; il vient, sur ce méridien,

$$\theta = 0, \quad h = \frac{dr}{d\delta}, \quad k = \frac{r_e}{r_p - r_e} \frac{r_p - r}{\sin \delta};$$

à mesure qu'on le parcourt en se rapprochant du pôle austral,  $k$  converge vers la valeur

$$k = \frac{r_e}{r_p - r_e} \left( \frac{dr}{d\delta} \right)_p.$$

138. Dans la projection étoilée de Petermann, qui dérive de la projection centrale de Guillaume Postel, on a, pour les demi-fuseaux de l'hémisphère sud,

$$r = \delta, \quad \text{tang} \mu = \frac{\sin m}{2 - \cos m}, \quad \sin \Theta = 2 \sin \mu,$$

$$\sin \theta = \frac{\pi}{\delta} \sin \mu, \quad h = \sec \theta,$$

$$k = \frac{\delta \cos \Theta \sin(\theta - \mu)}{\sin \delta \sin m \cos \theta}, \quad S = k,$$

$$a + b = \sqrt{(1 + k)^2 + \text{tang}^2 \theta}, \quad a - b = \sqrt{(1 - k)^2 + \text{tang}^2 \theta},$$

$$\sin \omega = \frac{a - b}{a + b}.$$

Sur le premier méridien,  $h$  est égal à l'unité, comme dans l'hémisphère nord, et les valeurs de  $k$  sont aussi les mêmes que pour les points de cet hémisphère. La longitude de l'un ou l'autre des deux méridiens extrêmes de chaque fuseau est  $m = 22^\circ 30'$ , d'où résulte  $\mu = 19^\circ 35'$ ,  $\Theta = 42^\circ 5'$ . Le premier des deux Tableaux ci-après donne les valeurs des éléments de la déformation pour les points de ce méridien qui ont des latitudes multiples de  $15^\circ$ ; le second donne les valeurs que prennent les mêmes éléments sur un demi-méridien quelconque de

l'hémisphère sud, quand on construit la carte du globe entier d'après la projection de Guillaume Postel.

*Projection étoilée de Petermann. Hémisphère sud.  $m = 22^{\circ} 30'$ .*

$\delta'$ .	$\theta$ .	$h$ .	$k$ .	$2\omega$ .	$a$ .	$b$ .	$S$ .
$0^{\circ}$ .....	$0^{\circ} 19.35'$	1,061	0,732	$29^{\circ} 10'$	1,107	0,661	0,732
15.....	21.26	1,074	0,754	29.54	1,130	0,667	0,754
30.....	23.42	1,092	0,799	30.14	1,167	0,685	0,799
45.....	26.32	1,118	0,875	30.46	1,228	0,713	0,875
60.....	30.10	1,157	1,069	31.39	1,368	0,782	1,069
75.....	35. 3	1,222	1,200	36.52	1,520	0,789	1,200
90.....	42. 5	1,347	1,571	46.12	1,897	0,828	1,571

*Projection de Guillaume Postel. Hémisphère sud.  
Méridien quelconque.*

$\delta'$ .	$\theta$ .	$h$ .	$k$ .	$2\omega$ .	$a$ .	$b$ .	$S$ .
$0^{\circ}$ .....	$0^{\circ} 0'$	1,000	$\infty$	$180^{\circ} 0'$	$\infty$	1,000	$\infty$
15.....	0.0	1,000	11,127	113.15	11,127	1,000	11,127
30.....	0.0	1,000	5,236	85.35	5,236	1,000	5,236
45.....	0.0	1,000	3,332	65. 9	3,332	1,000	3,332
60.....	0.0	1,000	2,424	49. 2	2,424	1,000	2,424
75.....	0.0	1,000	1,897	36. 5	1,897	1,000	1,897
90.....	0.0	1,000	1,571	25.39	1,571	1,000	1,571

**FORMULES COMMUNES AUX DIVERSES CLASSES  
DE PROJECTION.**

139. Considérons la surface terrestre comme étant de révolution autour de la ligne des pôles. Soient, en un point quelconque,  $\rho$  le rayon de courbure du méridien et  $\nu$  le rayon du parallèle. Si l'on adopte pour coordonnées la latitude  $l$  et la longitude  $m$ , l'expression de la longueur d'un arc infiniment petit sera, sur le méridien,  $\rho dl$ , et, sur le parallèle,  $\nu dm$ . Rapportons maintenant les points de la carte à deux axes perpendiculaires entre eux ; pour définir le système de projection, il suffira de faire connaître chacune des deux coordonnées  $x$ ,  $y$  en fonction de  $l$  et de  $m$ . Les projections des arcs infiniment petits de méridien et de parallèle seront respectivement

$$\left[ \left( \frac{dx}{dl} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dl} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dl, \quad \left[ \left( \frac{dx}{dm} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dm} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dm,$$

et l'on aura, pour les rapports de longueurs sur ces deux lignes,

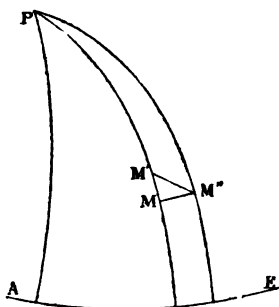
$$h = \frac{1}{\rho} \left[ \left( \frac{dx}{dl} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dl} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad k = \frac{1}{\nu} \left[ \left( \frac{dx}{dm} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dm} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Cherchons l'expression du rapport de surfaces  $S$ , et proposons-nous de l'obtenir sans ambiguïté de signe.

Soient P (*fig. 22*) le pôle boréal, PA le premier méridien, AE l'équateur, enfin M, M', M'' trois points infiniment voisins, situés, les deux premiers sur un même méridien, le premier et le troisième sur un même parallèle, et tels que du premier au second la latitude aille en augmentant, ainsi que la longitude du premier au troisième. Un observateur placé entre M' et M'' sur la

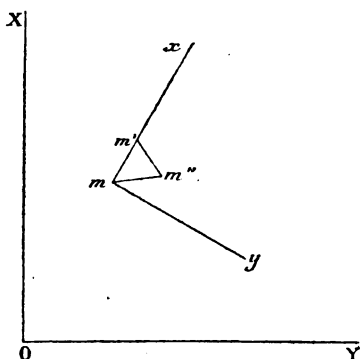
surface terrestre, et regardant  $M$ , aurait  $M'$  à sa droite et  $M''$  à sa gauche. Soient maintenant  $m, m', m''$  (fig. 23) les projections des trois points; nous voulons que sur la

Fig. 22.



carte et sur le globe la disposition des parties correspondantes soit la même; il faut donc qu'un observateur placé entre  $m'$  et  $m''$  regardant  $m$  ait  $m'$  à sa droite.

Fig. 23.



Prenons un système d'axes provisoires perpendiculaires entre eux, tels que la direction positive du premier,  $m x$ , aille de  $m$  à  $m'$ , et que celle du second,  $m y$ , soit du

même côté de  $mx$  que  $m''$ ; enfin imaginons que l'on répète pour les divers points du globe autres que  $M$  et pour leurs projections les constructions que nous venons d'indiquer. Chacun des systèmes d'axes provisoires sera tel, que, si l'on se place à l'origine et que l'on se tourne du côté des ordonnées positives, on aura à sa gauche la partie positive de l'axe des abscisses. Donc on peut ramener tous ces systèmes d'axes à un seul  $OX, OY$ , en les transportant parallèlement à eux-mêmes et en faisant subir à chacun une rotation convenable. Dans ce dernier système, auquel nous supposerons rapportés tous les points de la carte, l'origine  $O$  et la direction  $OX$  de la partie positive de l'un des axes sont arbitraires; mais, ces deux éléments une fois choisis, la position  $OY$  de la partie positive de l'autre axe se trouve déterminée.

Cela posé, imaginons que deux axes, coïncidant d'abord avec  $mx$  et  $my$ , tournent autour de  $m$  d'un mouvement commun. Soient  $x', y'$  et  $x'', y''$  les coordonnées de  $m'$  et de  $m''$  par rapport à ces axes mobiles,  $x$  et  $y$  représentant toujours les coordonnées de  $m$  par rapport à  $OX$  et  $OY$ . A l'aide des formules ordinaires de la transformation des coordonnées, on peut vérifier que l'expression  $x'y'' - y'x''$  reste constante en grandeur et en signe pendant la rotation; or, lorsque les axes mobiles coïncident avec  $mx$  et  $my$ , elle se réduit à  $x'y''$  qui exprime alors le double de l'aire du triangle  $mm'm''$ , et, lorsque ces axes deviennent parallèles à  $OX$  et  $OY$ , on a

$$x' = \left( \frac{dx}{dl} \right) dl, \quad y' = \left( \frac{dy}{dl} \right) dl,$$

$$x'' = \left( \frac{dx}{dm} \right) dm, \quad y'' = \left( \frac{dy}{dm} \right) dm;$$

il vient donc

$$2 \text{ aire } mm'm'' = \left[ \left( \frac{dx}{dl} \right) \left( \frac{dy}{dm} \right) - \left( \frac{dx}{dm} \right) \left( \frac{dy}{dl} \right) \right] dl dm;$$

on a d'ailleurs

$$2 \text{ aire } MM'M'' = \rho_v dl dm;$$

de là résulte

$$S = \frac{1}{\rho_v} \left[ \left( \frac{dx}{dl} \right) \left( \frac{dy}{dm} \right) - \left( \frac{dx}{dm} \right) \left( \frac{dy}{dl} \right) \right].$$

Puisque l'on a  $hk \cos \theta = S$ , l'altération  $\theta$  de l'angle du méridien avec le parallèle pourra se calculer au moyen de la formule

$$\cos \theta = \frac{S}{hk},$$

de laquelle on déduit aussi les deux suivantes :

$$\sin \theta = \frac{1}{hk\rho_v} \left[ \left( \frac{dx}{dl} \right) \left( \frac{dx}{dm} \right) + \left( \frac{dy}{dl} \right) \left( \frac{dy}{dm} \right) \right],$$

$$\text{tang } \theta = \frac{\left( \frac{dx}{dl} \right) \left( \frac{dx}{dm} \right) + \left( \frac{dy}{dl} \right) \left( \frac{dy}{dm} \right)}{\left( \frac{dx}{dl} \right) \left( \frac{dy}{dm} \right) - \left( \frac{dx}{dm} \right) \left( \frac{dy}{dl} \right)}.$$

On arriverait encore à l'expression de  $\sin \theta$  en remarquant que les quantités  $x'^2 + y'^2$ ,  $x''^2 + y''^2$ ,  $(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2$ , qui donnent les carrés des distances mutuelles des trois points  $m, m', m''$ , restent constantes quand on fait tourner les axes rectangulaires dont l'origine est en  $m$  autour de ce point, et que, par conséquent, il en est de même de la moitié de l'excès de la somme des deux premières quantités sur la troisième, c'est-à-dire de  $x'x'' + y'y''$ . Or, quand les axes coïncident avec  $mx$  et  $my$ , on a  $y'' = 0$  et  $x'x'' = mm' \times mm'' \cos m'mm''$ . Cette remarque fait voir aussi que les formules qui donnent  $\sin \theta$  et  $\text{tang } \theta$  restent toujours exactes quant au signe, pourvu que l'on considère  $\theta$  comme représentant le complément de l'angle  $m'mm''$ , complément qui peut être tantôt positif et tantôt négatif; rappelons que

le sens  $mm'$  est celui dans lequel les latitudes vont en augmentant sur le méridien, et le sens  $mm''$  celui dans lequel la longitude augmente sur le parallèle.

Les rapports  $h$ ,  $k$ ,  $S$  ayant été déterminés, les équations  $a^2 + b^2 = h^2 + k^2$ ,  $ab = S$  feront connaître les rapports de longueurs *maximum* et *minimum*  $a$  et  $b$ . Ces équations donnent

$$(a + b)^2 = \left[ \frac{1}{\rho} \left( \frac{dx}{dl} \right) + \frac{1}{v} \left( \frac{dy}{dm} \right) \right]^2 + \left[ \frac{1}{\rho} \left( \frac{dy}{dl} \right) - \frac{1}{v} \left( \frac{dx}{dm} \right) \right]^2,$$

$$(a - b)^2 = \left[ \frac{1}{\rho} \left( \frac{dx}{dl} \right) - \frac{1}{v} \left( \frac{dy}{dm} \right) \right]^2 + \left[ \frac{1}{\rho} \left( \frac{dy}{dl} \right) + \frac{1}{v} \left( \frac{dx}{dm} \right) \right]^2.$$

On obtiendra ensuite la moitié  $\omega$  de la plus grande altération d'angle en chaque point par la formule

$$\sin \omega = \frac{a - b}{a + b}.$$

140. *Projection de Schmidt* (Tableaux XXXVI). —

Les projections des méridiens sont les ellipses de la projection de Molleweide, et celles des parallèles divisent les circonférences de ces ellipses en parties proportionnelles aux différences de latitude. D'après cela, si nous prenons le rayon de la carte égal à  $\frac{\pi}{2}$ , l'équateur et le premier méridien se trouveront développés en vraie grandeur, comme dans la projection de Nicolosi, et les points de rencontre des parallèles de la carte avec le méridien principal seront les mêmes que dans cette dernière projection. On aura ainsi : sur l'équateur,  $\theta = 0$ ,  $k = 1$ ; sur le premier méridien,  $\theta = 0$ ,  $h = 1$ ; sur le méridien principal,  $h = \frac{\pi}{2}$ .

La définition précédente donne pour projection, au méridien de longitude  $m$ , la moitié d'une ellipse dont le

grand axe, égal à  $\pi$ , a ses sommets sur les projections des deux pôles, et dont le petit axe, égal à  $2m$ , a les siens sur la projection de l'équateur. Par le point de cette ellipse qui sert de projection au lieu terrestre de latitude  $l$  et de longitude  $m$ , menons une perpendiculaire au grand axe; prenons l'intersection de cette perpendiculaire avec la demi-circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre; joignons le point de rencontre au centre, et appelons  $\varphi$  l'angle que la droite ainsi obtenue fait avec le petit axe. La longueur  $\sigma$  de l'arc de l'ellipse compris entre le sommet du petit axe et le point considéré est une fonction connue de  $m$  et de  $\varphi$ ; la longueur  $M$  du quart de la même ellipse est une fonction connue de  $m$  seulement, entre ces deux fonctions; on a, d'après le mode de tracé des parallèles de la carte, la relation

$$(20) \quad \sigma = \frac{2}{\pi} l M,$$

qui détermine l'angle  $\varphi$ , et par conséquent la position du point considéré sur l'ellipse. Les expressions de  $\sigma$  et de  $M$  sont d'ailleurs les suivantes. Si l'on pose

$$u^2 = \frac{\pi^2}{4} \cos^2 \varphi + m^2 \sin^2 \varphi,$$

on aura

$$(21) \quad \sigma = \int_0^\varphi u d\varphi, \quad M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u d\varphi.$$

La définition des parallèles de la carte donne aussi immédiatement le rapport de longueurs sur le méridien; il est le même que celui de la demi-ellipse à la moitié du méridien terrestre ou celui de  $2M$  à  $\pi$ ; il vient donc

$$h = \frac{2}{\pi} M.$$



Au tracé de l'ellipse et des droites que détermine l'angle  $\varphi$  on peut substituer le calcul des coordonnées rectangulaires du point considéré :

$$x = \frac{\pi}{2} \sin \varphi, \quad y = m \cos \varphi.$$

Pour obtenir  $k$  et  $\theta$ , il nous faut connaître les dérivées de  $x$  et de  $y$  par rapport à  $l$  et à  $m$ . On a d'abord

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dl} &= \frac{\pi}{2} \cos \varphi \frac{d\varphi}{dl}, & \frac{dx}{dm} &= \frac{\pi}{2} \cos \varphi \frac{d\varphi}{dm}, \\ \frac{dy}{dl} &= -m \sin \varphi \frac{d\varphi}{dl}, & \frac{dy}{dm} &= \cos \varphi - m \sin \varphi \frac{d\varphi}{dm}; \end{aligned}$$

d'un autre côté, l'équation (20) entraîne les relations

$$\frac{d\sigma}{dl} = \frac{2}{\pi} \mathbf{M}, \quad \frac{d\sigma}{dm} = \frac{2l}{\pi} \frac{d\mathbf{M}}{dm},$$

dans lesquelles on doit substituer aux dérivées de  $\sigma$  et de  $\mathbf{M}$  leurs expressions, telles qu'elles résultent de celles de ces quantités elles-mêmes; or, si l'on pose

$$v = \frac{u}{\sin^2 \varphi}, \quad \xi = \int_0^\varphi v \, d\varphi, \quad \mathbf{N} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} v \, d\varphi,$$

les expressions (21) donneront

$$\frac{d\sigma}{dl} = u \frac{d\varphi}{dl}, \quad \frac{d\sigma}{dm} = u \frac{d\varphi}{dm} + m\xi, \quad \frac{d\mathbf{M}}{dm} = m\mathbf{N};$$

effectuant les substitutions indiquées, on formera deux équations desquelles on tire immédiatement

$$\frac{d\varphi}{dl} = \frac{2\mathbf{M}}{\pi u}, \quad \frac{d\varphi}{dm} = \frac{m}{u} \left( \frac{2}{\pi} l\mathbf{N} - \xi \right);$$

de là on conclut

$$\frac{dx}{dl} = M \frac{\cos \varphi}{u}, \quad \frac{dx}{dm} = \frac{\pi}{2} m \left( \frac{2}{\pi} l N - \xi \right) \frac{\cos \varphi}{u},$$

$$\frac{dy}{dl} = -\frac{2}{\pi} m M \frac{\sin \varphi}{u}, \quad \frac{dy}{dm} = \cos \varphi - m^2 \left( \frac{2}{\pi} l N - \xi \right) \frac{\sin \varphi}{u}.$$

On peut maintenant appliquer les formules communes aux diverses classes de projection; elles donnent ici

$$\text{tang } \theta = \frac{2}{\pi} m \left[ \left( \frac{2}{\pi} l N - \xi \right) u \sec^2 \varphi - \text{tang } \varphi \right],$$

$$h = \frac{2}{\pi} M, \quad k = \frac{\pi}{2} \text{ sécl } \frac{\cos^2 \varphi}{u \cos \theta}, \quad S = \text{ sécl } M \frac{\cos^2 \varphi}{u}.$$

L'expression de  $h$  avait déjà été obtenue directement; celle de  $k$  se déduit de la formule  $hk \cos \theta = S$  et de l'expression de  $S$ .

Sur le premier méridien, on a

$$m = 0, \quad \sin \varphi = \frac{2}{\pi} l, \quad u = \frac{\pi}{2} \cos \varphi, \quad v = \frac{2}{\pi} \sin \varphi \text{ tang } \varphi,$$

$$\sigma = l, \quad \xi = \frac{2}{\pi} \log \cot \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right), \quad M = \frac{\pi}{2}, \quad N = \infty,$$

$$\theta = 0, \quad h = 1, \quad k = S = \frac{\cos \varphi}{\cos l};$$

de l'équateur au pôle, la valeur commune de  $k$  et de  $S$  varie de 1 à l'infini.

Sur le méridien principal, on a

$$m = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = l, \quad u = \frac{\pi}{2}, \quad v = \frac{2}{\pi} \sin^2 l,$$

$$\sigma = \frac{\pi}{2} l, \quad \xi = \frac{1}{2\pi} (2l - \sin 2l), \quad M = \frac{\pi^2}{4}, \quad N = \frac{1}{2},$$

$$\text{tang } \theta = \frac{1}{2} \text{ tang } l, \quad h = \frac{\pi}{2}, \quad k = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 3 \cos^2 l}, \quad S = \frac{\pi}{2} \cos l;$$

de l'équateur au pôle,  $k$  varie de 1 à  $\frac{1}{2}$ , et  $S$  de  $\frac{\pi}{2}$  à 0.

## PROJECTIONS AUTOGONALES.

141. Lorsqu'on fait usage de la variable  $\lambda$ , que nous avons déjà définie (n° 19) en posant

$$\lambda = \int_0^l \frac{\rho dt}{v},$$

l'expression de  $(a - b)^2$  commune à toutes les classes de projections devient

$$(a - b)^2 = \frac{1}{v^2} \left[ \left( \frac{dx}{d\lambda} - \frac{dy}{dm} \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\lambda} + \frac{dx}{dm} \right)^2 \right],$$

de sorte que la condition  $a = b$  revient aux deux suivantes :

$$(22) \quad \frac{dx}{d\lambda} = \frac{dy}{dm}, \quad \frac{dx}{dm} = -\frac{dy}{d\lambda}.$$

On aurait pu aussi les trouver en exprimant que l'on doit avoir  $\theta = 0$ ,  $h = k$ ; mais on aurait alors obtenu en même temps une autre solution correspondant au cas de la similitude inverse, pour les figures infiniment petites, solution que nous avons écartée d'avance en discutant le signe de l'expression de S.

Pour éliminer  $\gamma$ , par exemple, entre ces deux équations, il suffit de prendre les dérivées des deux membres, par rapport à  $\lambda$  dans la première et par rapport à  $m$  dans la seconde, puis d'ajouter membre à membre, ce qui donne

$$\frac{d^2x}{d\lambda^2} + \frac{d^2x}{dm^2} = 0;$$

cette équation aux dérivées partielles du second ordre

est bien connue, et l'on sait qu'elle a pour intégrale

$$x = f(\lambda + m\sqrt{-1}) + f_1(\lambda - m\sqrt{-1}),$$

$f$  et  $f_1$  désignant deux fonctions arbitraires. On obtient de la même manière, pour  $y$ , une expression analogue; mais les fonctions qui y figurent sont liées à  $f$  et à  $f_1$  par les équations (22); en ayant égard à ces deux équations, on trouve facilement l'expression de  $y$  qu'il faut joindre à celle de  $x$ , savoir

$$y = \frac{f'(\lambda + m\sqrt{-1}) - f_1'(\lambda - m\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}.$$

Ces deux formules donnent le moyen de trouver autant de projections autogonales que l'on voudra. Si l'on choisit pour  $f$  une fonction réelle, il faudra que  $f_1$  soit la même fonction; si  $f$  est une fonction imaginaire,  $f_1$  devra être sa conjuguée.

Désignons par  $f'$  et  $f_1'$  les dérivées des fonctions  $f$  et  $f_1$ . Si l'on remplace les dérivées partielles de  $x$  et de  $y$  par leurs valeurs dans l'une des deux expressions

$$h = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \left( \frac{dx}{d\lambda} \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\lambda} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad k = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \left( \frac{dx}{dm} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dm} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

il viendra, pour le rapport de longueurs en chaque point,

$$a = \frac{2}{\sqrt{2}} \sqrt{f'(\lambda + m\sqrt{-1}) f_1'(\lambda - m\sqrt{-1})}.$$

Le rayon de courbure en un point quelconque de la projection d'un méridien est

$$R_m = \frac{\left[ \left( \frac{dx}{d\lambda} \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\lambda} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx}{d\lambda} \frac{d^2y}{d\lambda^2} - \frac{dy}{d\lambda} \frac{d^2x}{d\lambda^2}}.$$

Or les équations (22) donnent

$$\frac{d^2 y}{d\lambda^2} = -\frac{d^2 x}{d\lambda dm}, \quad \frac{d^2 x}{d\lambda^2} = \frac{d^2 y}{d\lambda dm};$$

on en conclut

$$\frac{1}{R_m} = \frac{d}{dm} \left[ \left( \frac{dx}{d\lambda} \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\lambda} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

ou

$$\frac{1}{R_m} = \frac{d}{dm} \left( \frac{1}{a\lambda} \right).$$

On trouverait de même, abstraction faite du signe, en appelant  $R_p$  le rayon de courbure en un point quelconque de la projection d'un parallèle,

$$\frac{1}{R_p} = \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{1}{a\lambda} \right).$$

Les méridiens auront pour projections des cercles si  $R_m$  est indépendant de  $\lambda$ , c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{d^2}{d\lambda dm} \left( \frac{1}{a\lambda} \right) = 0;$$

la même équation exprime aussi que  $R_p$  est indépendant de  $m$ ; donc, dans une projection autogonale, si les méridiens de la carte sont circulaires, les parallèles le sont aussi, et réciproquement.

Supposons que l'on impose à la carte la condition que l'un des méridiens ait sa projection rectiligne. Les longitudes étant comptées à partir de ce méridien, et sa projection étant prise pour axe des  $x$ , il faudra que pour  $m = 0$  on ait  $y = 0$ , ce qui donne  $f_1(\lambda) = f(\lambda)$ ;  $f$  et  $f_1$  devront donc être une même fonction réelle. Alors, pour  $x = 0$ , il viendra  $x = 2f(\lambda)$ , de sorte que le système de projection se trouvera déterminé si l'on donne le mode de développement du premier méridien.

Par exemple, si l'on veut que l'abscisse du point de rencontre du méridien rectiligne de la carte avec la projection du parallèle de latitude  $l$  soit constamment égale à  $\lambda$ , il faudra qu'on ait  $2f(\lambda) = \lambda$ , de sorte que chacune des fonctions  $f, f_1$  se réduira au quotient de la variable par 2; il vient alors  $x = \lambda, y = m$ . La projection ainsi obtenue n'est autre que celle de Mercator.

Si l'on veut que le premier méridien soit périmécoïque, c'est-à-dire que pour  $m = 0$  on ait  $x = l$ , abstraction faite de l'aplatissement, il faudra prendre

$$f(\lambda) = \frac{1}{2}l = \text{arc tang } e^\lambda - \frac{\pi}{4},$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} x &= \text{arc tang } e^{\lambda+m\sqrt{-1}} + \text{arc tang } e^{\lambda-m\sqrt{-1}} - \frac{\pi}{2}, \\ y\sqrt{-1} &= \text{arc tang } e^{\lambda+m\sqrt{-1}} - \text{arc tang } e^{\lambda-m\sqrt{-1}}. \end{aligned}$$

On transformera facilement ces expressions en observant que l'on a

$$\begin{aligned} \frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{2} &= \text{tang } l, & \frac{e^{m\sqrt{-1}} + e^{-m\sqrt{-1}}}{2} &= \text{cos } m, \\ \frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2} &= \text{séc } l, & \frac{e^{m\sqrt{-1}} - e^{-m\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} &= \text{sin } m, \end{aligned}$$

et aussi

$$\text{tang}(y\sqrt{-1}) = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \sqrt{-1};$$

la transformation conduira aux formules

$$\text{tang } x = \text{tang } l \text{ séc } m, \quad y = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \text{cos } l \text{ sin } m}{1 - \text{cos } l \text{ sin } m},$$

qui ne sont autre chose que celles de la projection cylindrique autogonale transverse.

Prenons encore la fonction  $r_e e^{n\lambda}$  pour représenter la distance de l'origine à un parallèle quelconque de la carte,  $r_e$  et  $n$  étant deux constantes. Il viendra

$$x = \frac{r_e}{2} (e^{n(\lambda+m\sqrt{-1})} + e^{n(\lambda-m\sqrt{-1})}) = r_e e^{n\lambda} \cos(nm),$$

$$y = \frac{r_e}{2\sqrt{-1}} (e^{n(\lambda+m\sqrt{-1})} - e^{n(\lambda-m\sqrt{-1})}) = r_e e^{n\lambda} \sin(nm),$$

ce qui donne, pour l'équation du parallèle,

$$x^2 + y^2 = r_e^2 e^{2n\lambda},$$

et, pour celle d'un méridien,

$$y = x \operatorname{tang} m.$$

On retrouve ainsi les parallèles circulaires concentriques et les méridiens rectilignes convergents des projections coniques autogonales.

Pour obtenir les projections sphériques autogonales, il suffirait de définir la fonction  $f$  par la condition

$$f(\lambda) = \frac{1}{2} \frac{e^{n(z-\lambda_0)} - 1}{e^{n(z-\lambda_0)} + 1},$$

$n$  et  $\lambda_0$  étant deux constantes.

On déterminerait d'une manière analogue les projections autogonales dans lesquelles, l'équateur se trouvant représenté par une ligne droite, les points de rencontre des divers méridiens avec l'équateur devraient se projeter sur cette ligne suivant des lois données.

142. L'ensemble des parallèles d'une carte peut être représenté par une équation  $F(x, y, p) = 0$  entre deux coordonnées rectangulaires  $x, y$  et un paramètre  $p$  fonction de  $\lambda$ ; de même, l'ensemble des méridiens, par une équation  $F_1(x, y, q) = 0$  entre  $x, y$  et un paramètre  $q$ ,

fonction de  $m$ . Supposons connue l'une des deux équations, la première par exemple : avec cette donnée, on pourra tracer les courbes projections des parallèles, mais non indiquer parmi ces courbes quelle est celle qui correspond à un parallèle de latitude donnée. Pour achever de fixer le mode de projection, il faudrait donc joindre à l'équation donnée  $F(x, y, p) = 0$ , non seulement l'équation  $F_1(x, y, q) = 0$ , mais aussi une relation entre  $p$  et  $\lambda$  et une autre entre  $q$  et  $m$ ; de sorte qu'il reste trois fonctions non encore déterminées. Est-il possible de choisir ces fonctions de manière que le système soit autogonal?

D'abord, les méridiens et les parallèles devant se couper à angle droit sur la carte comme sur le globe,  $F_1(x, y, q) = 0$  n'est autre chose que l'équation des trajectoires orthogonales des courbes représentées par  $F(x, y, p) = 0$ . Cette équation ayant été obtenue,  $x$  et  $y$  seront des fonctions connues de  $p$  et de  $q$ , ainsi que

$$U = \left[ \left( \frac{dx}{d\lambda} \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\lambda} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad V = \left[ \left( \frac{dx}{dm} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dm} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

et l'on aura

$$\theta = 0, \quad h = \frac{U}{v} \frac{dp}{d\lambda}, \quad k = \frac{V}{v} \frac{dq}{dm}.$$

La condition  $h = k$  donne ensuite

$$U \frac{dp}{d\lambda} = V \frac{dq}{dm};$$

comme  $p$  est indépendant de  $m$  et  $q$  de  $\lambda$ , cette équation ne peut être satisfaite si le rapport de  $V$  à  $U$  n'est pas celui d'une fonction de  $\lambda$  à une fonction de  $m$ , ou, ce qui revient au même, d'une fonction de  $p$  à une fonction



de  $q$ . Ainsi, le problème est généralement impossible, et nous n'avons à en chercher la solution que dans le cas particulier qui vient d'être indiqué. Supposons donc que l'on ait

$$\frac{U}{P} = \frac{V}{Q} = Z,$$

$P, Q$  étant respectivement des fonctions de  $p, q$ , et  $Z$  une fonction des deux variables; l'équation du problème sera devenue

$$P \frac{dp}{d\lambda} = Q \frac{dq}{dm}.$$

Chacun des deux membres ne contenant qu'une variable indépendante, ils ne peuvent devenir égaux sans se réduire à une même constante  $n$ ; nous poserons donc

$$P dp = n d\lambda, \quad Q dq = n dm,$$

ou

$$\int_{p_0}^p P dp = n(\lambda - \lambda_0), \quad \int_{q_0}^q Q dq = nm.$$

On peut considérer les limites inférieures  $p_0, q_0$  des intégrales comme deux quantités données, et  $\lambda_0$  comme une constante qui reste arbitraire tant que l'on n'a pas spécifié le parallèle auquel on veut que la courbe  $p = p_0$  ou  $F(x, y, p_0) = 0$  serve de projection. En ne mettant pas de constante en évidence dans la seconde intégration, nous avons supposé implicitement les longitudes comptées à partir du méridien auquel on juge à propos d'assigner comme projection la courbe  $q = q_0$  ou  $F_1(x, y, q_0) = 0$ .

On a maintenant

$$h = \frac{1}{z} PZ \frac{dp}{d\lambda} = \frac{n}{z} Z, \quad k = \frac{1}{z} QZ \frac{dq}{dm} = \frac{n}{z} Z;$$

le rapport de longueurs en chaque point est donc

$$\alpha = \frac{n}{v} Z.$$

Il vient aussi, abstraction faite des signes,

$$R_m = \frac{1}{n} \frac{d}{dm} \left( \frac{1}{Z} \right), \quad R_p = \frac{1}{n} \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{1}{Z} \right).$$

143. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de faire en sorte que l'une des deux séries de courbes formant le canevas se compose de circonférences. Cette condition ne suffisant pas pour déterminer l'équation  $F(x, y, p) = 0$  ou  $F_1(x, y, q) = 0$  à laquelle la série se rapporte, puisque l'équation du cercle contient trois paramètres, nous sommes conduits à poser deux autres conditions. Si la première assujettit les circonférences à avoir leurs centres en ligne droite, et la seconde à passer toutes par deux points donnés, réels ou imaginaires, on obtiendra les deux groupes de projections sphériques autogonales qui ont déjà été étudiés; dans tout autre cas, le problème sera impossible.

144. Pour second exemple, considérons un système de parallèles elliptiques homofocaux

$$\frac{y^2}{p^2} + \frac{x^2}{p^2 - 1} = 1;$$

leurs trajectoires orthogonales, que nous devons prendre comme méridiens, sont les hyperboles homofocales

$$\frac{y^2}{q^2} - \frac{x^2}{1 - q^2} = 1.$$

De ces deux équations on tire

$$x^2 = (p^2 - 1)(1 - q^2), \quad y = pq,$$

T.

22

d'où résultent, pour  $h$  et  $k$ , les valeurs

$$h = \frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{p^2 - q^2}{p^2 - 1}} \frac{dp}{d\lambda}, \quad k = \frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{p^2 - q^2}{1 - q^2}} \frac{dq}{dm}.$$

Pour les rendre égales entre elles, il suffit de poser

$$\frac{1}{\sqrt{p^2 - 1}} \frac{dp}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1 - q^2}} \frac{dq}{dm} = n,$$

ce qui donne

$$p = \frac{1}{2} (e^{n(\lambda - \lambda_0)} + e^{-n(\lambda - \lambda_0)}), \quad q = \sin nm,$$

$\lambda_0$  étant la valeur de  $\lambda$  qui correspond au parallèle dont la projection est rectiligne; on a alors

$$a = \frac{n}{\nu} \sqrt{p^2 - q^2}.$$

Lorsqu'on néglige l'aplatissement, l'expression de  $p$  devient

$$p = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\operatorname{tang} \frac{\delta}{2}}{\operatorname{tang} \frac{\delta_0}{2}} \right)^n + \left( \frac{\operatorname{tang} \frac{\delta_0}{2}}{\operatorname{tang} \frac{\delta}{2}} \right)^n \right].$$

145. *Projection de Littrow* (Tableaux VIII). — Prenons  $n = 1$  et  $\delta_0 = \frac{\pi}{2}$ ; les formules ci-dessus se réduiront à

$$p = \operatorname{sécl}, \quad q = \sin m, \quad a = \operatorname{sécl} \sqrt{\operatorname{séc}^2 l - \sin^2 m},$$

et le système de projection se trouvera défini par

$$x = \operatorname{tang} l \cos m, \quad y = \operatorname{sécl} \sin m.$$

La carte d'un hémisphère limité par un méridien couvre tout le plan. La moitié de l'équateur est représentée par la portion de droite comprise entre les deux

foyers communs; les moitiés de parallèles, par les contours entiers de demi-ellipses dont les dimensions vont en augmentant avec la latitude et, pour le pôle, deviennent infiniment grandes. Le premier méridien est remplacé par une droite indéfinie; chacun des autres méridiens a pour projection une branche entière d'hyperbole dont le sommet est d'autant plus près de l'un des foyers communs que la longitude est plus grande, et dont les asymptotes font entre elles un angle égal à  $\pi - 2m$ ; cet angle va toujours en diminuant; enfin, lorsque la longitude devient égale à  $\frac{\pi}{2}$ , le méridien se trouve représenté par l'un des prolongements de la portion de droite qui figure l'équateur. Sur le globe, deux points d'un même parallèle, appartenant à deux méridiens déterminés, sont d'autant plus voisins que leur latitude commune est plus grande; le contraire a lieu sur la carte. Cette remarque suffit pour montrer que la projection de Littrow est plus curieuse qu'utile.

146. Au lieu de considérer la carte comme la représentation du globe, on peut faire la supposition inverse, ce qui prouve que les systèmes autogonaux sont aussi caractérisés par les deux conditions suivantes,

$$(23) \quad \frac{d\lambda}{dx} = \frac{dm}{dy}, \quad \frac{d\lambda}{dy} = -\frac{dm}{dx},$$

desquelles on déduit d'autres conditions ou des formules analogues à celles du n° 141, en particulier, l'équation aux dérivées partielles

$$(24) \quad \frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2\lambda}{dy^2} = 0.$$

Cette remarque nous permet d'aborder une question plus compliquée que la précédente et dans laquelle, au

lieu de fixer les courbes qui doivent servir de projections aux méridiens ou aux parallèles, on indique seulement la nature de ces courbes. Supposons donc que les projections des parallèles soient données par une équation  $F(x, y, r, s, t, \dots) = 0$  contenant un certain nombre de paramètres  $r, s, t, \dots$  entre lesquels ne subsiste aucune relation désignée d'avance. La question une fois résolue, chacun de ces paramètres sera une fonction de  $\lambda$ , et, en vertu de l'équation donnée  $F = 0$ ,  $\lambda$  sera lui-même une fonction de  $x$  et de  $y$  qui devra satisfaire à l'équation (24). Réciproquement, si certaines fonctions de  $\lambda$  sont telles qu'en les substituant à  $r, s, t, \dots$  dans  $F$  et en résolvant l'équation  $F = 0$  par rapport à  $\lambda$ , on trouve, pour cette variable, une fonction de  $x$  et de  $y$  satisfaisant à l'équation (24), on aura déterminé un système autogonal. En effet, l'équation (24) exprime que  $\frac{d\lambda}{dx}$  et  $-\frac{d\lambda}{dy}$  sont respectivement les dérivées par rapport à  $y$  et par rapport à  $x$  d'une même fonction de ces deux variables; il sera donc facile de déterminer cette fonction, et, en l'égalant à  $m$ , on aura l'équation des projections des méridiens, puisque les conditions (23) se trouveront satisfaites.

Prenons les dérivées des deux membres de l'équation  $F = 0$  par rapport à  $x$ , en considérant  $r, s, t, \dots$  comme des fonctions de  $\lambda$  et  $\lambda$  comme une fonction de  $x$ ; il viendra

$$\left[ \left( \frac{dF}{dr} \right) \frac{dr}{d\lambda} + \left( \frac{dF}{ds} \right) \frac{ds}{d\lambda} + \left( \frac{dF}{dt} \right) \frac{dt}{d\lambda} \right] \left( \frac{d\lambda}{dx} \right) + \left( \frac{dF}{dx} \right) = 0.$$

Prenons encore, dans les mêmes conditions, les dérivées des deux membres par rapport à  $x$ , puis remplaçons, dans la nouvelle équation ainsi obtenue,  $\frac{d\lambda}{dx}$  par

sa valeur déduite de l'équation précédente; opérons de la même manière par rapport à  $y$ ; ajoutons membre à membre l'équation en  $\frac{d^2\lambda}{dx^2}$  et l'équation en  $\frac{d^2\lambda}{dy^2}$ , et supprimons le terme en  $\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2\lambda}{dy^2}$ , afin d'exprimer que cette somme doit être nulle; nous trouverons, en écrivant les termes dans la notation desquels figure  $r$ , mais en remplaçant les termes analogues où entreraient les autres paramètres par des points,

$$\begin{aligned} & \left( \frac{dF}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dF}{dy} \right)^2 \left[ \left( \frac{dF}{dr} \right) \frac{d^2r}{d\lambda^2} + \dots + \left( \frac{d^2F}{dr^2} \right) \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \dots \right] \\ & - \left[ \left( \frac{dF}{dr} \right) \frac{dr}{d\lambda} + \dots \right] \left\{ \left[ \frac{d}{dr} \left( \frac{dF}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dF}{dy} \right)^2 \frac{dr}{d\lambda} + \dots \right] \right\} \\ & + \left[ \left( \frac{d^2F}{dx^2} \right) + \left( \frac{d^2F}{dy^2} \right) \right] \left[ \left( \frac{dF}{dr} \right) \frac{dr}{d\lambda} + \dots \right]^2 = 0. \end{aligned}$$

Cette équation doit être satisfaite quel que soit  $x$  et quel que soit  $y$ , ou se confondre avec l'équation  $F = 0$ ; de là résultent les relations entre  $r, s, t, \dots$  et  $\lambda$  qui donneront les solutions du problème ou en indiqueront l'impossibilité.

Nous nous bornerons ici à ces indications sur la méthode à suivre, laquelle s'applique du reste à la représentation autogonale de deux surfaces quelconques l'une sur l'autre.

#### PROJECTIONS AUTHALIQUES.

147. Lorsqu'on fait usage de la variable  $\zeta$ , que nous avons déjà définie (n° 20), en posant

$$\zeta = \int_0^l \rho z \, dl,$$

l'expression du rapport de surfaces devient

$$S = \left( \frac{dx}{d\zeta} \right) \left( \frac{dy}{dm} \right) - \left( \frac{dx}{dm} \right) \left( \frac{dy}{d\zeta} \right),$$

et la condition de la conservation des aires est

$$\left( \frac{dx}{d\zeta} \right) \left( \frac{dy}{dm} \right) - \left( \frac{dx}{dm} \right) \left( \frac{dy}{d\zeta} \right) = 1.$$

Si l'une des coordonnées,  $y$  par exemple, est donnée en fonction de  $\zeta$  et de  $m$ , on aura ainsi une équation entre  $\zeta$ ,  $m$  et les dérivées partielles de  $x$  par rapport à ces variables, d'où l'on déduira, pour l'expression de  $x$ , une fonction déterminée de  $\zeta$  et de  $m$ , plus une fonction arbitraire d'une fonction déterminée de  $\zeta$  et de  $m$ .

148. On peut toujours trouver un groupe de projections atractozoniques dans lesquelles les méridiens et les parallèles se projettent sur deux séries de courbes données; voyons dans quel cas il existera un groupe de projections aouthaliques remplissant les mêmes conditions. Soient  $F(x, y, p) = 0$ ,  $F_1(x, y, q) = 0$  l'équation des parallèles et celle des méridiens de la carte,  $p$  étant une fonction de  $\zeta$  et  $q$  une fonction de  $m$  non encore déterminée. En considérant  $x$  et  $y$  comme des fonctions de  $p$  et de  $q$ , et prenant, pour les élever à zéro, les dérivées de  $F$  et de  $F_1$  par rapport à  $p$  et à  $q$ , on obtient quatre équations dont deux font connaître  $\left( \frac{dx}{dp} \right)$ ,  $\left( \frac{dy}{dp} \right)$ , et les deux autres  $\left( \frac{dx}{dq} \right)$ ,  $\left( \frac{dy}{dq} \right)$ , de sorte que, si l'on pose

$$T = \left( \frac{dx}{dp} \right) \left( \frac{dy}{dq} \right) - \left( \frac{dx}{dq} \right) \left( \frac{dy}{dp} \right),$$

$T$  se trouvera exprimé en fonction de  $x$ , de  $y$ , de  $p$  et de  $q$ , par conséquent aussi en fonction de  $p$  et de  $q$  seu-

lement. Or la condition de la conservation des aires peut s'écrire

$$T \frac{dp}{d\xi} \frac{dq}{dm} = 1;$$

pour qu'il soit possible d'y satisfaire, il faut donc que  $T$  soit le produit d'une fonction de  $p$  par une fonction de  $q$ . Supposons que cela ait lieu et appelons respectivement  $P$  et  $Q$  ces deux fonctions; la condition sera devenue

$$P \frac{dp}{d\xi} Q \frac{dq}{dm} = 1,$$

et, pour la remplir, on devra poser

$$P \frac{dp}{d\xi} = n, \quad Q \frac{dq}{dm} = \frac{1}{n},$$

$n$  désignant une constante arbitraire. On aura alors un groupe de projections aithaliques défini par les équations

$$n(\xi - \xi_0) = \int_{p_0}^p P dp, \quad m = n \int_{q_0}^q Q dq;$$

$p_0$  et  $q_0$  sont deux constantes arbitraires indiquant les courbes  $F(x, y, p_0) = 0$ ,  $F(x, y, q_0) = 0$  sur lesquelles se projettent respectivement le parallèle correspondant à  $\xi = \xi_0$  et le premier méridien.

Ce que nous venons de dire s'applique à la question dans laquelle on demanderait de trouver, s'il est possible, des systèmes rectangulaires aithaliques admettant des courbes données comme projections des parallèles ou comme projections des méridiens, car alors, des deux équations  $F = 0$ ,  $F_1 = 0$ , l'une serait celle des courbes données et l'autre celle de leurs trajectoires orthogonales.



149. Enfin, supposons qu'il ne soit rien spécifié relativement à l'une des deux séries de courbes, mais que l'autre, par exemple celle des projections des parallèles, soit donnée complètement par une équation  $F(x, y, \zeta) = 0$ ; cette équation ne contenant plus de fonction indéterminée de  $\zeta$ , on connaît non seulement les parallèles de la carte, mais on sait à quel parallèle du globe chacun d'eux correspond.

Au lieu de considérer le globe comme projeté sur la carte, on peut faire la supposition inverse, ce qui conduit à écrire de la manière suivante la condition de la conservation des aires :

$$\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)\left(\frac{dm}{dy}\right) - \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)\left(\frac{dm}{dx}\right) = 1.$$

Or, de l'équation  $F = 0$ , on tire

$$\left(\frac{dF}{d\zeta}\right)\left(\frac{d\zeta}{dx}\right) + \frac{dF}{dx} = 0, \quad \left(\frac{dF}{d\zeta}\right)\left(\frac{d\zeta}{dy}\right) + \frac{dF}{dy} = 0,$$

ce qui ramène la condition à

$$\left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dm}{dx}\right) - \left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dm}{dy}\right) = \left(\frac{dF}{d\zeta}\right).$$

En y remplaçant  $\zeta$  par sa valeur en fonction de  $x$  et de  $y$ , on aura une équation entre  $x, y$  et les dérivées de  $m$  par rapport à ces variables, d'où résulte pour  $m$  une expression de la forme : fonction déterminée de  $x$  et de  $y$ , plus fonction arbitraire d'une fonction déterminée de  $x$  et de  $y$ . On peut choisir cette fonction arbitraire de manière que l'un des méridiens, le premier méridien par exemple, ait pour projection une courbe donnée.

*Addition au n<sup>o</sup> 144.*

(A rétablir à la suite du Tableau numérique de la page 121).

L'Europe, moins une partie du Spitzberg et de la Nouvelle-Zemble, est comprise à l'intérieur d'une calotte sphérique ayant son pôle aux environs de Plock, en Pologne, et dont le rayon est de  $25^{\circ}$ ; les nombres des trois premières colonnes lui sont donc applicables. La même partie du monde est aussi comprise dans la zone limitée par les parallèles de  $35^{\circ}$  et de  $75^{\circ}$  de latitude, ce qui permet d'en construire la carte à l'aide de la projection conique autogonale qui est périalique pour cette zone, ou encore à l'aide de la projection tronconique authalique qui est périgonale pour ladite zone; mais ces deux projections conduisent à des altérations *maxima* respectivement plus fortes que celles de la projection stéréographique et que celles de la projection conique authalique qui figure dans le Tableau.

FIN



# TABLEAUX NUMÉRIQUES.



# TABLEAUX NUMÉRIQUES

## TABLEAU I.

Projection de Mercator.

$\ell$	$a$	$S$
0°	1,000	1,000
15	1,035	1,072
30	1,155	1,333
45	1,414	2,000
60	2,000	4,000
75	3,864	14,93
90	$\infty$	$\infty$

## TABLEAUX II

Projection cylindrique autoogonale de Lambert.

*Valeurs de a.*

$\ell$	$m$						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	1,000	1,035	1,155	1,414	2,000	3,863	$\infty$
15	1,000	1,033	1,142	1,369	1,825	2,779	3,863
30	1,000	1,028	1,109	1,265	1,512	1,825	2,000
45	1,000	1,017	1,069	1,155	1,265	1,369	1,414
60	1,000	1,008	1,033	1,069	1,109	1,142	1,155
75	1,000	1,002	1,008	1,017	1,026	1,033	1,035
90	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

*Valeurs de S.*

$\ell$	$m$						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	1,000	1,072	1,333	2,000	4,000	14,93	$\infty$
15	1,000	1,067	1,304	1,874	3,331	7,723	14,93
30	1,000	1,053	1,231	1,600	2,286	3,331	4,000
45	1,000	1,035	1,143	1,333	1,600	1,874	2,000
60	1,000	1,017	1,067	1,143	1,231	1,304	1,333
75	1,000	1,005	1,017	1,035	1,053	1,067	1,072
90	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

**TABLEAU III.**

Projection stéréographique équatoriale.

$\delta$	$a$	$S$
0°	1,000	1,000
15	1,017	1,035
30	1,072	1,149
45	1,172	1,373
60	1,333	1,778
75	1,589	2,524
90	2,000	4,000

**TABLEAUX IV.**

Projection stéréographique méridienne.

*Valeurs de a.*

$\rho$	$m$						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	1,000	1,017	1,072	1,172	1,333	1,589	2,000
15	1,017	1,035	1,089	1,188	1,349	1,600	2,000
30	1,072	1,089	1,143	1,240	1,396	1,634	2,000
45	1,172	1,188	1,240	1,333	1,478	1,691	2,000
60	1,333	1,349	1,396	1,478	1,600	1,771	2,000
75	1,589	1,600	1,634	1,691	1,771	1,874	2,000
90	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000

*Valeurs de S.*

$\rho$	$m$						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	1,000	1,035	1,149	1,373	1,778	2,524	4,000
15	1,035	1,070	1,186	1,412	1,819	2,560	4,000
30	1,149	1,186	1,306	1,539	1,948	2,669	4,000
45	1,373	1,412	1,539	1,778	2,183	2,858	4,000
60	1,778	1,819	1,948	2,183	2,560	3,137	4,000
75	2,524	2,560	2,669	2,858	3,137	3,513	4,000
90	4,000	4,000	4,000	4,000	4,000	4,000	4,000

**TABLEAUX V.**

Projections coniques autoconales de Lambert.

*Valeurs de P et de  $\ell_0$*

<i>n</i>	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
<b>P</b>	0°	36°	72°	108°	144°	180°
$\ell_0$	0° 0' 0"	5° 44' 20"	11° 32' 10"	17° 27' 30"	23° 34' 40"	30° 0' 0"

*Valeurs de P et de  $\ell_0$  (Suite)*

<i>n</i>	0,6	0,65	$\frac{2}{3}$	0,7	0,8	0,9	1
<b>P</b>	216°	234°	240°	252°	288°	324°	360°
$\ell_0$	36° 52' 10"	40° 32' 30"	42° 48' 40"	44° 25' 40"	53° 7' 50"	64° 9' 30"	90° 0' 0"

*Valeurs de  $\alpha$ .*

$\ell$	<i>n</i> =0	<i>n</i> =0,1	<i>n</i> =0,2	<i>n</i> =0,3	<i>n</i> =0,4	<i>n</i> =0,5
0°	1,000	1,005	1,020	1,049	1,086	1,140
15	1,035	1,013	1,002	1,003	1,011	1,034
30	1,155	1,098	1,056	1,027	1,006	1,000
45	1,414	1,302	1,210	1,139	1,079	1,037
60	2,000	1,762	1,568	1,414	1,282	1,180
75	3,864	3,170	2,628	2,206	1,864	1,598
90	∞	∞	∞	∞	∞	∞

*Valeurs de  $\alpha$  (Suite)*

$\ell$	<i>n</i> =0,6	<i>n</i> =0,65	$n=\frac{2}{3}$	<i>n</i> =0,7	<i>n</i> =0,8	<i>n</i> =0,9	<i>n</i> =1
0°	1,213	1,258	1,275	1,311	1,445	1,640	2,000
15	1,071	1,096	1,106	1,127	1,210	1,338	1,588
30	1,007	1,016	1,020	1,030	1,075	1,155	1,333
45	1,011	1,003	1,002	1,000	1,010	1,049	1,171
60	1,100	1,069	1,059	1,043	1,008	1,003	1,072
75	1,388	1,301	1,274	1,225	1,103	1,022	1,017
90	∞	∞	∞	∞	∞	∞	1,000



Valeurs de S

$\ell$	$n=0$	$n=0,1$	$n=0,2$	$n=0,3$	$n=0,4$	$n=0,5$
0°	1,000	1,010	1,041	1,101	1,179	1,299
15	1,072	1,026	1,004	1,006	1,022	1,068
30	1,333	1,207	1,114	1,056	1,013	1,000
45	2,000	1,694	1,464	1,297	1,165	1,076
60	4,000	3,105	2,459	1,998	1,644	1,392
75	14,93	10,05	6,907	4,868	3,476	2,553
90	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$

Valeurs de S (Suite)

$\ell$	$n=0,6$	$n=0,65$	$n=\frac{2}{3}$	$n=0,7$	$n=0,8$	$n=0,9$	$n=1$
0°	1,470	1,582	1,624	1,718	2,088	2,689	4,000
15	1,147	1,202	1,223	1,270	1,465	1,789	2,524
30	1,014	1,033	1,041	1,061	1,156	1,334	1,778
45	1,021	1,006	1,003	1,000	1,019	1,101	1,372
60	1,211	1,142	1,122	1,087	1,015	1,005	1,149
75	1,926	1,693	1,624	1,500	1,216	1,044	1,035
90	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	1,000

TABLEAUX VI.

Projections auto-gonales à méridiens circulaires.

$n$	P	Valeurs de $a$ pour			
		$\ell=0, m=0$	$\ell=0, m=90^\circ$	$\ell=75, m=90^\circ$	$\ell=90^\circ$
0,0	0°	1,000	1,000	3,864	$\infty$
0,1	18	1,000	1,006	3,848	$\infty$
0,2	36	1,000	1,025	3,799	$\infty$
0,3	54	1,000	1,058	3,712	$\infty$
0,4	72	1,000	1,106	3,576	$\infty$
0,5	90	1,000	1,172	3,409	$\infty$
0,6	108	1,000	1,260	3,188	$\infty$
0,7	126	1,000	1,376	2,925	$\infty$
0,8	144	1,000	1,528	2,628	$\infty$
0,9	162	1,000	1,729	2,315	$\infty$
1,0	180	1,000	2,000	2,000	2,000
1,1	198	1,000	2,371	1,699	0,000
1,2	216	1,000	2,894	1,423	0,000
1,3	234	1,000	3,663	1,178	0,000
1,4	252	1,000	4,852	0,967	0,000
1,5	270	1,000	6,829	0,790	0,000
1,6	288	1,000	10,47	0,642	0,000
1,7	306	1,000	18,35	0,521	0,000
1,8	324	1,000	40,87	0,422	0,000
1,9	342	1,000	162,6	0,342	0,000
2,0	360	1,000	$\infty$	0,277	0,000

$n$	Valeurs de $S$ pour			
	$\ell=0, m=0$	$\ell=0, m=90^\circ$	$\ell=75^\circ, m=90^\circ$	$\ell=90^\circ$
0,0	1,000	1,000	14,93	$\infty$
0,1	1,000	1,012	14,81	$\infty$
0,2	1,000	1,051	14,43	$\infty$
0,3	1,000	1,119	13,77	$\infty$
0,4	1,000	1,222	12,79	$\infty$
0,5	1,000	1,373	11,61	$\infty$
0,6	1,000	1,587	10,16	$\infty$
0,7	1,000	1,892	8,555	$\infty$
0,8	1,000	2,334	6,908	$\infty$
0,9	1,000	2,987	5,359	$\infty$
1,0	1,000	4,000	4,000	4,000
1,1	1,000	5,621	2,886	0,000
1,2	1,000	8,378	2,024	0,000
1,3	1,000	13,42	1,388	0,000
1,4	1,000	23,54	0,936	0,000
1,5	1,000	46,63	0,624	0,000
1,6	1,000	109,7	0,413	0,000
1,7	1,000	336,8	0,272	0,000
1,8	1,000	1670	0,178	0,000
1,9	1,000	26440	0,117	0,000
2,0	1,000	$\infty$	0,077	0,000

TABLEAUX VII.  
Projection de Lagrange.

$\delta$	$\delta'$
90°	90° 0' 0"
75	69,140
60	49,23,20
45	32,5,0
30	17,39,20
15	6,30,24
0	0,0,0

$m$	$m\sqrt{2}$
0°	0° 0' 0"
15	21,12,48
30	42,25,35
45	63,38,23
60	84,51,10
75	106,3,58
90	127,16,45

Valeurs de  $a$

$\ell$	$m$						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	1,000	1,035	1,151	1,385	1,835	2,765	5,072
15	1,000	1,033	1,145	1,367	1,784	2,607	4,450
30	0,997	1,027	1,123	1,311	1,641	2,219	3,245
45	0,981	1,005	1,079	1,216	1,434	1,761	2,215
60	0,931	0,946	0,991	1,069	1,181	1,324	1,486
75	0,786	0,792	0,808	0,834	0,867	0,904	0,940
90	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Valeurs de S

$\rho$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,000	1,071	1,324	1,918	3,369	7,647	25,73
15	1,000	1,068	1,310	1,869	3,183	6,798	19,81
30	0,993	1,054	1,262	1,719	2,694	4,926	10,53
45	0,963	1,010	1,165	1,478	2,057	3,102	4,906
60	0,866	0,894	0,983	1,143	1,395	1,754	2,209
75	0,618	0,627	0,653	0,695	0,751	0,817	0,884
90	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Valeurs de  $\alpha$

$\rho$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,000	0,966	0,869	0,722	0,545	0,362	0,197
15	1,000	0,968	0,874	0,731	0,560	0,384	0,225
30	1,003	0,974	0,890	0,763	0,609	0,451	0,308
45	1,019	0,995	0,927	0,823	0,697	0,568	0,451
60	1,074	1,058	1,009	0,935	0,847	0,755	0,673
75	1,271	1,263	1,238	1,200	1,154	1,106	1,064
90	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$

Valeurs de  $\Sigma$

$\rho$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,000	0,933	0,755	0,521	0,297	0,131	0,039
15	1,000	0,936	0,763	0,535	0,314	0,147	0,050
30	1,007	0,949	0,792	0,582	0,371	0,203	0,095
45	1,039	0,990	0,859	0,677	0,486	0,322	0,204
60	1,154	1,119	1,018	0,875	0,717	0,570	0,453
75	1,617	1,595	1,532	1,439	1,331	1,224	1,132
90	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$

TABLEAUX VIII.

Projection autozonale de Littrow.

sur l'équateur.

$m$	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$a$	1,000	0,966	0,866	0,707	0,500	0,259	0,000
$S$	1,000	0,933	0,750	0,500	0,250	0,067	0,000
$\alpha$	1,000	1,035	1,155	1,414	2,000	3,864	$\infty$
$\Sigma$	1,000	1,072	1,333	2,000	4,000	14,93	$\infty$

*Valeurs de a.*

$\ell$	$m$	
	$0^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,000	0,000
15	1,072	0,277
30	1,333	0,667
45	2,000	1,414
60	4,000	3,464
75	14,93	14,42
$90^\circ$	$\infty$	$\infty$

*Valeurs de S.*

$\ell$	$m$	
	$0^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,000	0,000
15	1,149	0,077
30	1,778	0,444
45	4,000	2,000
60	16,00	12,00
75	222,8	207,9
$90^\circ$	$\infty$	$\infty$

**TABLEAU IX .**  
Développement cylindrique .

$\ell$	$2\omega$	$a$	$b$	$a\beta$
$0^\circ$	$0^\circ 0'$	1,000	1,000	1,000
15	3,58	1,035	0,966	1,072
30	16,25	1,155	0,866	1,333
45	38,57	1,414	0,707	2,000
60	73,44	2,000	0,500	4,000
75	121,57	3,864	0,259	14,93
$90^\circ$	180,0	$\infty$	0,000	$\infty$

**TABLEAU X .**  
Projection centrale authalique équatoriale de Lambert  
dite projection de Lorcna .

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$(a)$
$0^\circ$	$0^\circ 0'$	1,000	1,000	1,414
15	0,59	1,009	0,991	1,423
30	3,58	1,035	0,966	1,464
45	9,4	1,082	0,924	1,531
60	16,26	1,155	0,866	1,633
75	26,17	1,260	0,793	1,783
$90^\circ$	38,57	1,414	0,707	2,000

TABLEAUX XI .

Projection centrale authalique méridienne de Lambert .

Valeurs de  $2\omega$

$\ell$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	0,0	0,59	3,58	9,4	16,26	26,17	38,57
15	0,59	1,57	4,53	9,53	17,4	26,41	38,57
30	3,58	4,53	7,39	12,19	19,1	27,51	38,57
45	9,4	9,53	12,19	16,26	22,14	29,45	38,57
60	16,26	17,4	19,1	22,14	26,41	32,18	38,57
75	26,17	26,41	27,51	29,45	32,18	35,25	38,57
90	38,57	38,57	38,57	38,57	38,57	38,57	38,57

Valeurs de  $a$

$\ell$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,000	1,009	1,035	1,082	1,155	1,260	1,414
15	1,009	1,017	1,044	1,090	1,161	1,265	1,414
30	1,035	1,044	1,069	1,114	1,181	1,278	1,414
45	1,082	1,090	1,114	1,155	1,216	1,300	1,414
60	1,155	1,161	1,181	1,216	1,265	1,331	1,414
75	1,260	1,265	1,278	1,300	1,331	1,369	1,414
90	1,414	1,414	1,414	1,414	1,414	1,414	1,414

Valeurs de  $b$

$\ell$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,000	0,991	0,966	0,924	0,866	0,793	0,707
15	0,991	0,983	0,958	0,917	0,861	0,791	0,707
30	0,966	0,958	0,935	0,898	0,846	0,782	0,707
45	0,924	0,917	0,898	0,866	0,823	0,769	0,707
60	0,866	0,861	0,846	0,823	0,791	0,751	0,707
75	0,793	0,791	0,782	0,769	0,751	0,730	0,707
90	0,707	0,707	0,707	0,707	0,707	0,707	0,707

Valeurs de (a)

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,414	1,423	1,464	1,531	1,633	1,783	2,000
15	1,423	1,438	1,476	1,542	1,642	1,789	2,000
30	1,464	1,476	1,512	1,575	1,671	1,808	2,000
45	1,531	1,542	1,575	1,633	1,719	1,839	2,000
60	1,633	1,642	1,671	1,719	1,789	1,882	2,000
75	1,783	1,789	1,808	1,839	1,882	1,936	2,000
90	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000

TABLEAU XII.

Projection conique aouthalique perigonale.

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$a\beta$	(a)
$0^\circ$	$19^\circ 45'$	1,189	0,841	1,414	1,414
15	18,47	1,179	0,848	1,390	1,402
30	15,50	1,149	0,871	1,319	1,366
45	10,46	1,099	0,910	1,207	1,307
60	3,22	1,030	0,971	1,061	1,225
75	6,40	1,060	0,943	1,123	1,260
90	$19^\circ 45'$	1,189	0,841	1,414	1,414

TABLEAUX XIII.

Projection aouthalique de Mollweide  
dite projection homalographique de Babinet.

Valeurs de  $2\omega$

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	$12^\circ 1'$	$12^\circ 1'$	$12^\circ 1'$	$12^\circ 1'$	$12^\circ 1'$	$12^\circ 1'$	$12^\circ 1'$
15	10,30	10,43	11,22	12,22	13,38	15,6	16,43
30	5,45	7,16	10,33	14,25	18,29	22,37	26,44
45	2,57	7,26	13,55	20,30	27,0	33,20	39,29
60	17,27	19,52	25,41	32,57	40,39	48,18	55,42
75	43,14	45,1	49,50	56,33	64,7	71,49	79,16
90	180,0	180,0	180,0	180,0	180,0	180,0	180,0

Valeurs de  $a$ .

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,111	1,111	1,111	1,111	1,111	1,111	1,111
15	1,096	1,098	1,104	1,114	1,127	1,141	1,158
30	1,052	1,065	1,097	1,134	1,176	1,220	1,265
45	1,026	1,067	1,129	1,197	1,268	1,343	1,421
60	1,165	1,190	1,254	1,339	1,437	1,444	1,659
75	1,472	1,497	1,567	1,673	1,806	1,959	2,127
90	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$

Valeurs de  $b$

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	0,900	0,900	0,900	0,900	0,900	0,900	0,900
15	0,912	0,911	0,905	0,898	0,888	0,876	0,864
30	0,951	0,939	0,912	0,881	0,850	0,820	0,790
45	0,975	0,937	0,885	0,835	0,788	0,744	0,704
60	0,858	0,840	0,798	0,747	0,696	0,648	0,603
75	0,679	0,668	0,638	0,598	0,554	0,511	0,470
90	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

$$e = 89^\circ$$

$m$	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$2\omega$	$118^\circ 58'$	$119^\circ 50'$	$122^\circ 13'$	$125^\circ 39'$	$129^\circ 33'$	$133^\circ 31'$	$137^\circ 18'$
$a$	3,665	3,721	3,882	4,137	4,470	4,863	5,305
$b$	0,273	0,269	0,258	0,242	0,224	0,226	0,188
$k$	3,665	3,665	3,665	3,665	3,665	3,665	3,665
$\frac{1}{k}$	0,273	0,273	0,273	0,273	0,273	0,273	0,273

$$m = 90^\circ$$

$\ell$	$2\omega$	$a$
0°	12° 1'	1, 111
10	14, 12	1, 122
20	21, 12	1, 205'
30	26, 44	1, 265
40	34, 54	1, 362
50	44, 16	1, 486
60	55, 42	1, 659
70	70, 2	1, 921
80	91, 10	2, 448
90	180, 0	$\infty$

$\ell$	$k$	$\frac{1}{k}$
0°	0,900	1,111
15	0,912	1,096
30	0,951	1,052
45	1,026	0,975
60	1,165	0,858
75	1,472	0,679
90	$\infty$	0,000

### TABLEAUX XIV.

Projection sinusoidale de Nicolas Sanson  
dite projection de Flamsteed.

Valeurs de  $2\omega$

$\ell$	$m$						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	0° 0'	0° 0'	0° 0'	0° 0'	0° 0'	0° 0'	0° 0'
15	0, 0	3, 53	7, 45	11, 36	15, 26	19, 14	22, 59
30	0, 0	7, 29	14, 55	22, 13	29, 21	36, 15	42, 53
45	0, 0	10, 35	20, 59	31, 2	40, 38	49, 40	58, 5
60	0, 0	12, 56	25, 33	37, 34	48, 47	59, 5	68, 27
75	0, 0	14, 25	28, 23	41, 33	53, 39	64, 36	74, 24
90	0, 0	14, 55	29, 21	42, 53	55, 16	66, 25	76, 18

Valeurs de  $a$

$\ell$	$m$						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
15	1,000	1,035	1,070	1,107	1,145	1,183	1,224
30	1,000	1,068	1,139	1,215	1,295	1,379	1,467
45	1,000	1,098	1,202	1,314	1,437	1,565	1,699
60	1,000	1,120	1,252	1,396	1,551	1,716	1,890
75	1,000	1,134	1,284	1,449	1,626	1,815	2,014
90	1,000	1,139	1,295	1,467	1,652	1,850	2,057



Valeurs de  $b$

$\ell$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
15	1,000	0,966	0,934	0,904	0,874	0,845	0,817
30	1,000	0,937	0,878	0,823	0,772	0,725	0,682
45	1,000	0,912	0,832	0,761	0,696	0,639	0,589
60	1,000	0,893	0,799	0,716	0,645	0,583	0,529
75	1,000	0,882	0,779	0,690	0,615	0,551	0,496
90	1,000	0,878	0,772	0,682	0,605	0,541	0,486

Valeurs de  $(a)$

$\ell$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	2,057	2,057	2,057	2,057	2,057	2,057	0,057
15	2,057	2,129	2,201	2,276	2,354	2,434	2,517
30	2,057	2,196	2,344	2,500	2,665	2,837	3,017
45	2,057	2,256	2,473	2,703	2,955	3,218	3,495
60	2,057	2,303	2,575	2,872	3,191	3,530	3,887
75	2,057	2,333	2,642	2,980	3,345	3,734	4,144
90	2,057	2,344	2,665	3,017	3,399	3,805	4,231

TABLEAU XV.

Projection sinusoidale authalique pério-gonale.

$m=90^\circ$

$\ell$	$2\omega$	$a$	$b$	$(a)$
$0^\circ$	$35^\circ, 4'$	1,365	0,733	2,528
15	38,30	1,408	0,710	2,610
30	46,17	1,515	0,660	2,807
45	54,31	1,640	0,610	3,039
60	61,5	1,751	0,571	3,245
75	65,11	1,826	0,548	3,384
90	66,34	1,853	0,540	3,433

**TABLEAU XVI.**

Projection dite de Bonne  
ou du Dépôt de la Guerre, ou de la Carte de France.

$$\ell = 90^\circ$$

<i>m</i>	$\theta$	$2\omega$	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i> $\beta$
90°	57° 31'	76° 18'	2,057	0,486	4,231
180	72,21	115,0	3,433	0,291	11,786

**TABLEAUX XVII.**

Projection à méridiens et parallèles rectilignes de M<sup>r</sup> Collignon.

$$m = 0$$

$\ell$	$2\omega$	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i> $\beta$
0°	13° 49'	1,128	0,886	1,273
15	0,39	1,006	0,994	1,011
30	9,23	1,085	0,921	1,178
45	16,45	1,158	0,864	1,341
60	21,46	1,211	0,826	1,466
75	24,42	1,243	0,805	1,544
90	25,39	1,253	0,798	1,571

$$m = 90^\circ$$

$\ell$	$2\omega$	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i> $\beta$
0°	49° 21'	1,560	0,641	2,433
15	52,52	1,614	0,620	2,605
30	57,31	1,684	0,598	2,836
45	61,42	1,762	0,567	3,105
60	64,50	1,820	0,550	3,312
75	66,45	1,856	0,539	3,445
90	67,23	1,869	0,535	3,492

$$\ell = 0$$

<i>m</i>	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$2\omega$	13° 49'	16° 9'	21° 37'	28° 20'	35° 25'	42° 28'	49° 21'
<i>a</i>	1,128	1,152	1,209	1,284	1,369	1,461	1,560
<i>b</i>	0,886	0,868	0,827	0,779	0,730	0,684	0,641
<i>a</i> $\beta$	1,273	1,327	1,462	1,647	1,874	2,136	2,433

$$\ell = 90^\circ$$

<i>m</i>	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
2ω	25°39'	28°8'	34°21'	42°21'	50°53'	59°20'	67°23'
<i>a</i>	1,253	1,281	1,356	1,460	1,583	1,721	1,869
<i>b</i>	0,798	0,780	0,737	0,685	0,632	0,581	0,535
<i>aβ</i>	1,571	1,642	1,838	2,131	2,506	2,960	3,497

### TABLEAUX XVIII.

Projection dite stéréographique équivalente  
de M<sup>r</sup> de Prépetit Foucault.

$$m = 0$$

$\ell$	2ω	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>aβ</i>
0°	13°49'	1,128	0,886	1,273
15	11°51'	1,109	0,902	1,230
30	5°53'	1,053	0,950	1,108
45	4°18'	1,038	0,963	1,078
60	19°2'	1,182	0,846	1,396
75	38°28'	1,408	0,710	1,982
90	62°17'	1,772	0,564	3,142

$$m = 90^\circ$$

$\ell$	2ω	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>aβ</i>
0°	13°49'	1,128	0,886	1,273
15	38,46	1,412	0,708	1,994
30	62,33	1,777	0,563	3,159
45	74,17	2,012	0,497	4,048
60	76,18	2,057	0,486	4,232
75	72,48	1,980	0,505	3,920
90	62,17	1,772	0,564	3,142

### TABLEAU XIX.

Projection authalique de Werner.

$$m = 90^\circ$$

$\ell$	2ω	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>aβ</i>
90° 0' 0"	0° 0'	1,000	1,000	1,000
15, 0, 0	41, 4	1,460	0,685	2,130
0, 0, 0	53, 8	1,618	0,618	2,618
-67, 12, 10	79, 43	2,138	0,468	4,570
-75, 0, 0	79, 20	2,128	0,470	4,530
-90, 0, 0	76, 18	2,057	0,486	4,231

**TABLEAU XX.**

Projection des cartes plates carrées.

$\ell$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000
15	1,59	1,035	1,000	1,035
30	8,14	1,155	1,000	1,155
45	19,46	1,414	1,000	1,414
60	38,57	2,000	1,000	2,000
75	72,9	3,864	1,000	3,864
90	180,0	$\infty$	1,000	$\infty$

**TABLEAU XXI.**

Projection des cartes plates  
dans laquelle le degré de l'équateur de la carte est égal au degré  
du parallèle terrestre de 45° de latitude.

$\ell$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$
0°	38° 57'	1,189	0,841	1,000
15	35,11	1,189	0,871	1,035
30	23,5	1,189	0,971	1,155
45	0,0	1,189	1,189	1,414
60	38,57	1,682	1,189	2,000
75	99,35	3,249	1,189	3,864
90	180,0	$\infty$	1,189	$\infty$

**TABLEAU XXII.**

Projection stéréographique à cylindre du P. Braun.

$\ell$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000
15	1,0	1,035	1,017	1,053
30	4,16	1,155	1,072	1,238
45	10,46	1,414	1,172	1,657
60	23,4	2,000	1,333	2,667
75	49,19	3,864	1,589	6,138
90	180,0	$\infty$	2,000	$\infty$

**TABLEAU XXIII.**

Projection de Mercator modifiée du P. Braun.

$\ell$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$
0°	0°, 0'	1,000	1,000	1,000
15	0, 17	1,040	1,035	1,077
30	1, 3	1,176	1,155	1,358
45	2, 2	1,465	1,414	2,072
60	2, 5	2,074	2,000	4,148
75	4, 42	3,864	3,559	13,75
90	180,0	$\infty$	8,750	$\infty$

**TABLEAUX XXIV.**

Développements coniques.

$n' = 0$

$\ell$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$	$\beta$	$\Sigma$
0°	19° 46'	1,189	0,841	1,000	1,189	1,000
15	32,36	1,149	0,645	0,741	1,550	1,349
30	42,7	1,030	0,485	0,500	2,060	2,000
45	49,6	0,841	0,348	0,293	2,871	3,414
60	53,32	0,595	0,225	0,134	4,438	7,464
75	56,18	0,308	0,110	0,034	9,052	29,34
90	57,3	0,000	0,000	0,000	$\infty$	$\infty$

$n' = \frac{1}{3}$

$\ell$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$	$\beta$	$\Sigma$
0°	8° 13'	1,075	0,931	1,000	1,074	1,000
15	16,29	1,038	0,760	0,789	1,316	1,268
30	21,41	0,931	0,636	0,592	1,573	1,690
45	17,48	0,760	0,558	0,423	1,798	2,366
60	0,50	0,545	0,537	0,296	1,861	3,414
75	55,18	0,760	0,278	0,211	3,596	4,732
90	57,3	$\infty$	0,000	0,183	$\infty$	5,450

$n' = \frac{1}{2}$

$\ell$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$	$\beta$	$\Sigma$
0°	4° 32'	1,040	0,961	1,000	1,040	1,000
15	13,11	1,005	0,798	0,802	1,253	1,247
30	15,39	0,901	0,685	0,617	1,459	1,620
45	9,27	0,736	0,624	0,459	1,603	2,180
60	12,35	0,648	0,520	0,337	1,922	2,966
75	68,47	0,968	0,269	0,261	3,714	3,836
90	180,0	$\infty$	0,000	0,235	$\infty$	4,262

$n'=1$

$\ell$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$	$\beta$	$\Sigma$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
15	7,36	0,966	0,846	0,817	1,182	1,224
30	8,30	0,866	0,746	0,646	1,340	1,547
45	0,0	0,707	0,707	0,500	1,414	2,000
60	24,56	0,775	0,500	0,388	2,000	2,580
75	81,15	1,225	0,259	0,317	3,864	3,155
90	180,0	$\infty$	0,000	0,293	$\infty$	3,414

**TABLEAU XXV.**

Projection gnomonique à cône.

$\ell$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$	$\beta$	$\Sigma$	$(a)$	$(S)$
0°	8° 14'	1,075	0,931	1,000	1,075	1,000	1,336	1,540
15	1,59	0,864	0,834	0,721	1,198	1,388	1,072	1,110
30	0,0	0,806	0,806	0,650	1,241	1,540	1,000	1,000
45	1,59	0,864	0,834	0,721	1,198	1,388	1,072	1,110
60	8,14	1,075	0,931	1,000	1,075	1,000	1,336	1,540
75	19,45	1,612	1,140	1,837	0,877	0,544	2,000	2,828
90	38,57	3,224	1,612	5,196	0,622	0,192	4,000	8,000

**TABLEAUX XXVI.**

Projection stéréographique méridienne modifiée.

$m$	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$2\omega$	13° 48'	12° 15'	7° 48'	1° 3'	7° 13'	16° 19'	25° 39'

Valeurs de  $a$

$\ell$	$m$						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	1,128	1,128	1,128	1,128	1,280	1,502	1,772
15	1,148	1,147	1,146	1,143	1,292	1,509	1,772
30	1,209	1,207	1,200	1,188	1,330	1,533	1,772
45	1,322	1,316	1,297	1,268	1,393	1,572	1,772
60	1,504	1,491	1,451	1,389	1,486	1,626	1,772
75	1,793	1,764	1,683	1,563	1,612	1,693	1,772
90	2,257	2,196	2,031	1,805	1,772	1,772	1,772

Valeurs de  $b$

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	0,886	0,911	0,985	1,108	1,128	1,128	1,128
15	0,902	0,926	1,000	1,122	1,139	1,134	1,128
30	0,950	0,974	1,047	1,166	1,172	1,152	1,128
45	1,038	1,062	1,132	1,244	1,228	1,181	1,128
60	1,182	1,203	1,266	1,363	1,310	1,222	1,128
75	1,408	1,424	1,468	1,534	1,421	1,272	1,128
90	1,772	1,772	1,772	1,772	1,562	1,332	1,128

Valeurs de  $S$

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,000	1,028	1,111	1,250	1,444	1,694	2,000
15	1,035	1,063	1,145	1,282	1,472	1,712	2,000
30	1,149	1,176	1,256	1,386	1,558	1,766	2,000
45	1,373	1,397	1,469	1,577	1,712	1,857	2,000
60	1,778	1,794	1,837	1,893	1,948	1,986	2,000
75	2,524	2,511	2,471	2,397	2,290	2,155	2,000
90	4,000	3,892	3,600	3,200	2,769	2,361	2,000

Valeurs de  $(a)$

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,273	1,273	1,273	1,273	1,444	1,694	2,000
15	1,295	1,295	1,293	1,290	1,458	1,703	2,000
30	1,365	1,362	1,354	1,341	1,500	1,730	2,000
45	1,492	1,485	1,464	1,430	1,572	1,774	2,000
60	1,698	1,682	1,637	1,567	1,677	1,835	2,000
75	2,023	1,990	1,899	1,763	1,819	1,911	2,000
90	2,558	2,478	2,292	2,037	2,000	2,000	2,000

**TABLEAUX XXVII.**  
Projection atractozonique

<i>e</i>	<i>e'</i>	<i>m</i>	<i>m'</i>
0°	0° 0' 0"	0°	0° 0' 0"
15	17.35, 0	15	22.3, 20
30	34.38, 30	30	41.47, 30
45	50.42, 30	45	58.9, 10
60	65.25, 20	60	71.14, 30
75	78.33, 0	75	81.39, 0
90	90.0, 0	90	90.0, 0

*Valours de 2ω*

<i>e</i>	<i>m</i>						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	13°48'	10°26'	1°24'	13°8'	23°45'	36°16'	47°40'
15	13.55	10.32	1.30	13.2	23.39	36.10	47.35
30	14.20	10.57	1.55	12.36	23.14	35.46	47.11
45	15.13	11.50	2.48	11.44	22.22	34.55	46.22
60	16.47	13.25	4.24	10.9	20.48	33.23	44.54
75	19.19	15.58	6.57	7.36	18.16	30.56	42.32
90	23.5	19.45	10.46	3.47	14.29	27.14	38.56

*Valours de a*

<i>e</i>	<i>m</i>						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	1,128	1,105	1,040	1,160	1,341	1,548	1,772
15	1,140	1,115	1,048	1,162	1,336	1,534	1,746
30	1,176	1,146	1,069	1,163	1,319	1,490	1,669
45	1,237	1,200	1,105	1,161	1,287	1,418	1,549
60	1,326	1,277	1,153	1,147	1,234	1,319	1,399
75	1,444	1,378	1,213	1,116	1,159	1,200	1,233
90	1,596	1,504	1,284	1,064	1,064	1,064	1,064



Valeurs de  $b$ .

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	0,886	0,920	1,015	0,922	0,883	0,813	0,752
15	0,894	0,927	1,021	0,925	0,882	0,807	0,742
30	0,915	0,947	1,034	0,933	0,877	0,790	0,715
45	0,948	0,976	1,052	0,945	0,869	0,764	0,674
60	0,988	1,010	1,068	0,961	0,857	0,730	0,626
75	1,029	1,042	1,074	0,978	0,842	0,695	0,577
90	1,064	1,064	1,064	0,996	0,826	0,658	0,532

Valeurs de  $S$

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,000	1,017	1,056	1,070	1,185	1,258	1,333
15	1,019	1,033	1,069	1,079	1,179	1,238	1,296
30	1,077	1,085	1,106	1,086	1,157	1,178	1,192
45	1,173	1,172	1,162	1,098	1,118	1,083	1,043
60	1,310	1,290	1,231	1,102	1,057	0,964	0,875
75	1,486	1,435	1,303	1,091	0,976	0,834	0,711
90	1,698	1,600	1,366	1,060	0,878	0,700	0,566

Valeurs de  $\beta$

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,128	1,087	0,985	1,085	1,132	1,230	1,329
15	1,119	1,079	0,980	1,081	1,134	1,239	1,347
30	1,092	1,056	0,967	1,072	1,140	1,265	1,399
45	1,055	1,025	0,950	1,058	1,151	1,310	1,484
60	1,012	0,990	0,936	1,041	1,167	1,369	1,598
75	0,972	0,960	0,931	1,023	1,188	1,439	1,734
90	0,940	0,940	0,940	1,004	1,211	1,519	1,880

Valeurs de  $\Sigma$

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,000	0,984	0,947	0,935	0,844	0,795	0,750
15	0,981	0,968	0,935	0,921	0,848	0,808	0,771
30	0,929	0,921	0,904	0,931	0,864	0,849	0,839
45	0,852	0,854	0,860	0,911	0,895	0,923	0,958
60	0,763	0,775	0,812	0,907	0,946	1,038	1,142
75	0,673	0,697	0,767	0,916	1,025	1,200	1,406
90	0,589	0,625	0,732	0,944	1,139	1,428	1,767

TABLEAUX XXVIII.

Projection polyconique rectangulaire.

Valeurs de  $2 \omega$

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	$0^\circ 0'$	$1^\circ 56'$	$7^\circ 21'$	$15^\circ 21'$	$24^\circ 51'$	$34^\circ 54'$	$44^\circ 51'$
15	0. 0	1. 52	7. 7	14. 54	24. 11	34. 3	43. 54
30	0. 0	1. 43	6. 29	13. 39	22. 18	31. 39	41. 3
45	0. 0	1. 27	5. 36	11. 54	19. 38	28. 9	36. 53
60	0. 0	1. 13	4. 43	10. 5	16. 56	24. 23	32. 19
75	0. 0	1. 2	4. 2	8. 43	14. 40	21. 27	28. 40
90	0. 0	0. 59	3. 48	8. 13	13. 51	20. 19	27. 16

Valeurs de  $a$ .

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,000	1,034	1,137	1,308	1,548	1,857	2,234
15	1,000	1,032	1,127	1,285	1,502	1,777	2,105
30	1,000	1,026	1,101	1,223	1,385	1,580	1,802
45	1,000	1,017	1,066	1,143	1,241	1,353	1,471
60	1,000	1,008	1,033	1,069	1,119	1,162	1,211
75	1,000	1,002	1,009	1,018	1,029	1,041	1,052
90	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

*Valeurs de  $b$ .*

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
15	1,000	0,999	0,995	1,990	0,982	0,972	0,960
30	1,000	0,996	0,983	0,963	0,936	0,903	0,866
$45$	1,000	0,991	0,967	0,928	0,879	0,824	0,764
60	1,000	0,987	0,951	0,896	0,831	0,757	0,684
75	1,000	0,984	0,940	0,874	0,796	0,714	0,635
90	1,000	0,983	0,936	0,866	0,785	0,700	0,618

*Valeurs de  $S$ .*

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,000	1,034	1,137	1,308	1,548	1,857	2,234
15	1,000	1,031	1,122	1,272	1,475	1,728	2,022
30	1,000	1,021	1,083	1,177	1,296	1,428	1,561
$45$	1,000	1,008	1,031	1,061	1,091	1,114	1,125
60	1,000	0,996	0,982	0,958	0,930	0,880	0,828
75	1,000	0,987	0,948	0,890	0,820	0,744	0,668
90	1,000	0,983	0,936	0,866	0,785	0,700	0,618

*Valeurs de  $\beta$ .*

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
15	1,000	1,001	1,005	1,010	1,018	1,029	1,041
30	1,000	1,004	1,017	1,039	1,069	1,107	1,154
$45$	1,000	1,009	1,034	1,077	1,137	1,214	1,308
60	1,000	1,013	1,051	1,116	1,206	1,321	1,463
75	1,000	1,016	1,064	1,144	1,256	1,400	1,576
90	1,000	1,017	1,069	1,154	1,274	1,428	1,617

Valeurs de  $\Sigma$

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,000	0,967	0,879	0,764	0,646	0,539	0,448
15	1,000	0,970	0,891	0,786	0,678	0,579	0,495
30	1,000	0,979	0,924	0,849	0,772	0,700	0,641
45	1,000	0,992	0,970	0,942	0,916	0,898	0,889
60	1,000	1,004	1,018	1,044	1,075	1,137	1,208
75	1,000	1,014	1,055	1,124	1,220	1,345	1,497
90	1,000	1,017	1,069	1,154	1,274	1,428	1,617

TABLEAUX XXIX.  
Projection d'Apianus.

$m=0$

$e$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$
$0^\circ$	$0^\circ 0'$	1,000	1,000	1,000
15	0.22	1,007	1,000	1,007
30	1.30	1,026	1,000	1,026
45	3.23	1,061	1,000	1,061
60	6.2	1,111	1,000	1,111
75	9.30	1,181	1,000	1,181
90	13.48	1,273	1,000	1,273

$m=90^\circ$

$e$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$
$0^\circ$	$0^\circ 0'$	1,000	1,000	1,000
15	9.42	1,107	0,935	1,035
30	20.22	1,285	0,899	1,155
45	33.16	1,596	0,886	1,414
60	50.45	2,236	0,894	2,000
75	78.55	4,164	0,928	3,864
90	180.0	$\infty$	1,000	$\infty$

**TABLEAUX XXX.**  
Projection polyconique ordinaire.

*Valeurs de  $\theta$*

<i>e</i>	<i>m</i>						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	0° 0'	0° 0'	0. 0	0. 0	0. 0	0. 0	0. 0
15	0. 0	0. 2	0. 18	0. 52	1. 45	2. 52	4. 9
30	0. 0	0. 4	1. 28	1. 23	2. 53	4. 50	7. 8
45	0. 0	0. 4	0. 27	1. 24	2. 59	5. 10	7. 51
60	0. 0	0. 2	0. 17	0. 55	2. 1	3. 38	5. 46
75	0. 0	0. 1	0. 5	0. 17	0. 39	1. 13	2. 0
90	0. 0	0. 0	0. 0	0. 0	0. 0	0. 0	0. 0

*Valeurs de  $h$ .*

<i>e</i>	<i>m</i>						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	1,000	1,034	1,137	1,308	1,548	1,857	2,234
15	1,000	1,032	1,128	1,287	1,509	1,794	2,141
30	1,000	1,026	1,102	1,229	1,404	1,626	1,893
45	1,000	1,017	1,068	1,151	1,264	1,404	1,571
60	1,000	1,009	1,034	1,074	1,129	1,195	1,270
75	1,000	1,002	1,009	1,020	1,034	1,050	1,069
90	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

*Valeurs de  $z$  ( $\omega$ )*

<i>e</i>	<i>m</i>						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	0° 0'	1° 55'	7° 21'	15° 20'	24° 50'	34° 55'	44° 51'
15	0. 0	1. 48	6. 53	14. 26	23. 29	33. 9	42. 49
30	0. 0	1. 27	5. 36	11. 52	19. 33	28. 1	36. 43
45	0. 0	0. 58	3. 45	8. 9	13. 42	20. 4	26. 52
60	0. 0	0. 29	1. 54	4. 11	7. 13	10. 50	14. 51
75	0. 0	0. 8	0. 31	1. 9	1. 57	3. 4	4. 18
90	0. 0	0. 0	0. 0	0. 0	0. 0	0. 0	0. 0

Valeurs de *a*

<i>e</i>	<i>m</i>						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	1,000	1,034	1,137	1,308	1,548	1,857	2,234
15	1,000	1,032	1,128	1,287	1,510	1,795	2,143
30	1,000	1,026	1,102	1,229	1,405	1,629	1,899
45	1,000	1,017	1,068	1,152	1,266	1,410	1,580
60	1,000	1,009	1,034	1,075	1,131	1,200	1,280
75	1,000	1,002	1,009	1,020	1,034	1,053	1,073
90	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Valeurs de *b*

<i>e</i>	<i>m</i>						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
15	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,997
30	1,000	1,000	1,000	0,999	0,997	0,994	0,989
45	1,000	1,000	1,000	0,999	0,996	0,992	0,984
60	1,000	1,000	1,000	0,999	0,997	0,993	0,987
75	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,995
90	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Valeurs de *S*

<i>e</i>	<i>m</i>						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	1,000	1,034	1,137	1,308	1,548	1,857	2,234
15	1,000	1,032	1,128	1,287	1,508	1,792	2,135
30	1,000	1,026	1,102	1,228	1,402	1,620	1,879
45	1,000	1,017	1,068	1,150	1,262	1,399	1,556
60	1,000	1,009	1,034	1,074	1,128	1,192	1,264
75	1,000	1,002	1,009	1,020	1,034	1,050	1,068
90	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Valeurs de ( $a$ )

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,016	1,051	1,155	1,329	1,573	1,887	2,269
15	1,016	1,048	1,146	1,308	1,534	1,824	2,177
30	1,016	1,042	1,120	1,249	1,428	1,655	1,929
45	1,016	1,033	1,085	1,170	1,287	1,433	1,606
60	1,016	1,025	1,050	1,092	1,149	1,219	1,301
75	1,016	1,018	1,025	1,036	1,051	1,069	1,090
90	1,016	1,016	1,016	1,016	1,016	1,016	1,016

TABLEAUX XXXI.  
Projection de Lortz.

$m = 0$  ( $2\omega = 25^\circ 39'$ )

$e$	$a$	$b$	$S$	$\Sigma$
$0^\circ$	0,253	0,798	1,000	1,000
15	1,211	0,771	0,993	1,072
30	1,085	0,691	0,750	1,333
45	0,886	0,564	0,500	2,000
60	0,627	0,399	0,250	4,000
75	0,324	0,207	0,067	14,93
90	0,000	0,000	0,000	$\infty$

$m = 90^\circ$  ( $S = 1$ )

$e$	$2\omega$	$a$	$b$
$0^\circ$	$25^\circ 39'$	1,253	0,798
15	28.14	1,283	0,780
30	35.54	1,375	0,727
45	49.21	1,560	0,641
60	72.4	1,964	0,509
75	112.50	3,314	0,302
90	180.0	$\infty$	0,000

**TABLEAUX XXXII.**  
Projection de Nicolosi.

Parallèles.

Méridiens.

<i>e</i>	<i>Q</i>	<i>R</i>
0°	∞	∞
5	15,77½	15,719
10	7,882	7,772
15	5,275	5,108
20	3,968	3,7½5
25	3,186	2,908
30	2,667	2,333
35	2,298	1,909
40	2,023	1,578
45	1,811	1,311
50	1,6½2	1,087
55	1,506	0,895
60	1,393	0,727
65	1,299	0,577
70	1,220	0,½½2
75	1,152	0,319
80	1,09½	0,205
85	1,0½½	0,099
90	1,000	0,000

<i>m</i>	<i>Q</i>	<i>R</i>
0°	∞	∞
5	8,972	9,028
10	4,½½½	½,556
15	2,917	3,083
20	2,139	2,361
25	1,661	1,939
30	1,333	1,667
35	1,091	1,½80
40	0,903	1,3½7
45	0,750	1,250
50	0,622	1,178
55	0,513	1,12½
60	0,½17	1,083
65	0,331	1,053
70	0,25½	1,032
75	0,183	1,017
80	0,118	1,007
85	0,057	1,002
90	0,000	1,000

*Valeurs de h*

<i>e</i>	<i>m</i>						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	1,000	1,016	1,063	1,1½3	1,25½	1,396	1,571
15	1,000	1,016	1,06½	1,1½½	1,255	1,398	1,571
30	1,000	1,017	1,067	1,1½8	1,261	1,402	1,571
45	1,000	1,018	1,070	1,155	1,269	1,409	1,571
60	1,000	1,019	1,076	1,165	1,281	1,418	1,571
75	1,000	1,021	1,082	1,177	1,296	1,430	1,571
90	1,000	1,023	1,090	1,191	1,31½	1,4½½	1,571

*Valeurs de k*

<i>e</i>	<i>m</i>						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
15	1,007	1,007	1,007	1,007	1,006	1,005	1,003
30	1,026	1,027	1,028	1,028	1,025	1,019	1,010
45	1,061	1,062	1,065	1,06½	1,058	1,0½½	1,02½
60	1,111	1,11½	1,118	1,118	1,105	1,080	1,0½3
75	1,181	1,185	1,193	1,191	1,171	1,129	1,069
90	1,273	1,280	1,291	1,289	1,258	1,193	1,10½



Valeurs de  $\theta$

$e$	$m$						
	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°
0°	0° 0'	0° 0'	0° 0'	0° 0'	0° 0'	0° 0'	0° 0'
5	0. 0	0. 9	0. 18	0. 27	0. 35	0. 42	0. 49
10	0. 0	0. 18	0. 36	0. 53	1. 9	1. 24	1. 38
15	0. 0	0. 27	0. 54	1. 20	1. 44	2. 7	2. 28
20	0. 0	0. 36	1. 12	1. 47	2. 19	2. 49	3. 17
25	0. 0	0. 45	1. 30	2. 13	2. 53	3. 31	4. 6
30	0. 0	0. 54	1. 48	2. 39	3. 28	4. 13	4. 55
35	0. 0	1. 3	2. 6	3. 6	4. 3	4. 56	5. 44
40	0. 0	1. 12	2. 24	3. 32	4. 37	5. 38	6. 33
45	0. 0	1. 21	2. 41	3. 59	5. 12	6. 20	7. 22
50	0. 0	1. 30	2. 59	4. 25	5. 46	7. 2	8. 12
55	0. 0	1. 39	3. 17	4. 51	6. 21	7. 44	9. 00
60	0. 0	1. 48	3. 35	5. 18	6. 55	8. 26	9. 50
65	0. 0	1. 57	3. 52	5. 44	7. 29	9. 8	10. 38
70	0. 0	2. 6	4. 10	6. 10	8. 4	9. 50	11. 27
75	0. 0	2. 15	4. 28	6. 36	8. 38	10. 32	12. 16
80	0. 0	2. 24	4. 45	7. 2	9. 12	11. 13	13. 5
85	0. 0	2. 33	5. 3	7. 28	9. 47	11. 56	13. 55
90	0. 0	2. 41	5. 19	7. 53	10. 20	12. 36	14. 43

Valeurs de  $\theta$  (Suite)

$e$	$m$					
	35°	40°	45°	50°	55°	60°
0°	0° 0'	0° 0'	0° 0'	0° 0'	0° 0'	0° 0'
5	0. 55	1. 1	1. 6	1. 10	1. 13	1. 16
10	1. 50	2. 1	2. 11	2. 19	2. 25	2. 31
15	2. 46	3. 2	3. 17	3. 29	3. 39	3. 47
20	3. 42	4. 3	4. 22	4. 39	4. 52	5. 3
25	4. 37	5. 4	5. 28	5. 48	6. 5	6. 19
30	5. 32	6. 5	6. 34	6. 58	7. 18	7. 35
35	6. 28	7. 6	7. 40	8. 8	8. 32	8. 51
40	7. 23	8. 7	8. 45	9. 18	9. 45	10. 7
45	8. 18	9. 8	9. 51	10. 28	10. 58	11. 23
50	9. 14	10. 9	10. 57	11. 38	12. 12	12. 40
55	10. 9	11. 10	12. 3	12. 48	13. 26	13. 56
60	11. 5	12. 11	13. 9	13. 59	14. 40	15. 13
65	12. 0	13. 12	14. 15	15. 9	15. 56	16. 30
70	12. 56	14. 14	15. 22	16. 20	17. 8	17. 48
75	13. 51	15. 15	16. 28	17. 30	18. 23	19. 5
80	14. 46	16. 16	17. 34	18. 41	19. 37	20. 23
85	15. 43	17. 19	18. 43	19. 55	20. 55	21. 44
90	16. 37	18. 19	19. 47	21. 4	22. 7	23. 0

Valeurs de  $\theta$  (fin)

$e$	$m$					
	65°	70°	75°	80°	85°	90°
0°	0° 0'	0° 0'	0° 0'	0° 0'	0° 0'	0° 0'
5	1.18	1.19	1.21	1.21	1.22	1.22
10	2.35	2.38	2.41	2.42	2.43	2.43
15	3.54	3.58	4.2	4.4	4.6	4.6
20	5.12	5.18	5.23	5.26	5.28	5.28
25	6.30	6.38	6.44	6.48	6.50	6.50
30	7.47	7.57	8.5	8.9	8.12	8.13
35	9.6	9.18	9.26	9.31	9.35	9.36
40	10.24	10.38	10.47	10.53	10.57	10.58
45	11.43	11.58	12.9	12.16	12.20	12.21
50	13.2	13.18	13.31	13.38	13.43	13.44
55	14.21	14.39	14.52	15.1	15.6	15.8
60	15.40	16.00	16.15	16.25	16.30	16.32
65	16.59	17.21	17.37	17.48	17.54	17.55
70	18.19	18.43	19.0	19.12	19.18	19.20
75	19.39	20.5	20.24	20.36	20.43	20.45
80	21.0	21.27	21.47	22.0	22.8	22.10
85	22.23	22.53	23.14	23.28	23.36	23.39
90	23.42	24.13	24.36	24.51	25.0	25.2

Valeurs de  $2\omega$

$e$	$m$						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	0° 0'	0° 54'	3° 31'	7° 38'	12° 56'	19° 3'	25° 29'
15	0.22	1.26	4.1	8.1	13.13	19.16	25.51
30	1.30	2.43	5.21	9.8	14.4	19.56	26.26
45	3.23	4.40	7.24	10.57	15.30	21.4	27.25
60	6.2	7.20	10.7	13.27	17.32	22.40	28.47
75	9.30	10.47	13.33	16.39	20.13	24.48	30.34
90	13.48	15.3	17.45	20.37	23.36	27.31	32.47

Valeurs de  $a$

$e$	$m$						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	1,000	1,016	1,063	1,143	1,254	1,396	1,571
15	1,007	1,024	1,072	1,150	1,260	1,401	1,574
30	1,026	1,046	1,095	1,173	1,280	1,417	1,582
45	1,061	1,082	1,134	1,211	1,314	1,443	1,596
60	1,111	1,134	1,189	1,267	1,363	1,480	1,616
75	1,181	1,205	1,264	1,342	1,430	1,530	1,642
90	1,273	1,299	1,363	1,440	1,518	1,595	1,675

Valeurs de  $b$

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
15	1,000	0,999	0,999	1,000	1,000	1,000	0,998
30	1,000	0,997	0,998	1,000	1,001	0,999	0,993
45	1,000	0,997	0,997	1,000	1,002	0,997	0,984
60	1,000	0,997	0,997	1,001	1,003	0,994	0,972
75	1,000	0,998	0,998	1,002	1,003	0,989	0,957
90	1,000	0,998	0,999	1,003	1,002	0,982	0,938

Valeurs de  $S$

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,000	1,016	1,063	1,143	1,254	1,396	1,571
15	1,007	1,023	1,071	1,150	1,260	1,401	1,571
30	1,026	1,043	1,093	1,173	1,281	1,415	1,571
45	1,061	1,078	1,130	1,211	1,316	1,438	1,571
60	1,111	1,130	1,185	1,268	1,367	1,471	1,571
75	1,181	1,202	1,261	1,345	1,434	1,514	1,571
90	1,273	1,297	1,361	1,445	1,521	1,567	1,571

Valeurs de  $(a)$

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,066	1,083	1,134	1,219	1,337	1,489	1,675
15	1,073	1,092	1,143	1,227	1,344	1,495	1,678
30	1,095	1,115	1,168	1,251	1,365	1,511	1,687
45	1,131	1,154	1,209	1,292	1,401	1,539	1,702
60	1,185	1,209	1,268	1,351	1,454	1,578	1,723
75	1,259	1,285	1,348	1,431	1,525	1,632	1,751
90	1,358	1,385	1,454	1,536	1,619	1,701	1,787

**TABLEAUX XXXIII**  
Projection de l'Astronomie populaire d'Araço.

*Valeurs de  $2\omega$*

<i>e</i>	<i>m</i>						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	0° 0'	0° 0'	0° 0'	0° 0'	0° 0'	0° 0'	0° 0'
15	1.11	1.58	3.24	4.58	6.29	8.4	9.38
30	4.52	5.51	8.5	10.50	13.46	16.47	19.49
45	11.36	12.36	15.14	18.46	22.46	26.59	31.16
60	22.43	23.43	26.28	30.25	35.6	40.9	45.21
75	42.28	43.24	46.3	50.0	54.51	60.11	65.42
90	180.0	180.0	180.0	180.0	180.0	180.0	180.0

*Valeurs de  $a$*

<i>e</i>	<i>m</i>						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
15	1,021	1,028	1,041	1,055	1,069	1,084	1,099
30	1,089	1,098	1,120	1,147	1,177	1,208	1,241
45	1,225	1,236	1,264	1,305	1,352	1,404	1,459
60	1,491	1,504	1,541	1,597	1,667	1,746	1,833
75	2,136	2,154	2,209	2,294	2,405	2,536	2,683
90	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

*Valeurs de  $b$*

<i>e</i>	<i>m</i>						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
15	1,000	0,993	0,981	0,968	0,955	0,942	0,929
30	1,000	0,991	0,972	0,949	0,925	0,901	0,877
45	1,000	0,991	0,969	0,939	0,906	0,873	0,839
60	1,000	0,991	0,967	0,933	0,894	0,854	0,813
75	1,000	0,991	0,967	0,931	0,888	0,842	0,796
90	1,000	0,992	0,967	0,931	0,886	0,837	0,786

<i>e</i>	<i>S</i>
0°	1,000
15	1,021
30	1,089
45	1,225
60	1,491
75	2,136
90	∞

Valeurs de  $\beta$

$\ell$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
15	1,0000	1,0007	1,0020	1,0035	1,0047	1,0062	1,0077
30	1,0000	1,0009	1,0029	1,0054	1,0081	1,1110	1,1440
45	1,0000	1,0009	1,0032	1,0065	1,1044	1,1446	1,1921
60	1,0000	1,0000	1,0034	1,0071	1,1118	1,1771	1,2300
75	1,0000	1,0000	1,0034	1,0074	1,1226	1,1887	1,2556
90	1,0000	1,0000	1,0034	1,0074	1,1229	1,1905	1,2722

Valeurs de  $(A)$

$\ell$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,2722	1,2722	1,2722	1,2722	1,2722	1,2722	1,2722
15	1,2908	1,3007	1,3223	1,3441	1,3600	1,3788	1,3988
30	1,3844	1,3966	1,4224	1,4558	1,4996	1,5337	1,5788
45	1,5557	1,5771	1,6008	1,6559	1,7119	1,7885	1,8555
60	1,8995	1,9122	1,9600	2,0511	2,1119	2,2200	2,3311
75	2,7116	2,7400	2,8009	2,9117	3,0558	3,2224	3,4122
90	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$

TABLEAUX XXXIV.

Seconde projection du P. Fournier.

$m = 0$

$m = 90^\circ$

$\ell$	$m = 0$			$\ell$	$m = 90^\circ$		
	$2\omega$	$a$	$b$		$2\omega$	$a$	$b$
$0^\circ$	25°39'	1,253	0,798	$0^\circ$	25°39'	1,253	0,798
15	23.43	1,211	0,798	15	29.54	1,280	0,755
30	17.34	1,085	0,798	30	40.39	1,334	0,648
45	6.1	0,886	0,798	45	55.48	1,397	0,506
60	13.48	0,798	0,627	60	75.42	1,445	0,346
75	49.55	0,798	0,324	75	103.54	1,475	0,175
90	180.0	0,798	0,000	90	180.0	1,486	0,000

$\ell$	S	$\Sigma$
$0^\circ$	1,0000	1,0000
15	0,956	1,035
30	0,866	1,155
45	0,707	1,414
60	0,500	2,000
75	0,259	3,864
90	0,000	$\infty$

### TABLEAUX XXXV.

Première projection du P. Fournier.

$m=0$  ( $\theta=0, b=1, S=a$ )

$\ell$	$2\omega$	$a$
0°	0° 0'	1,000
15	1.11	1,021
30	4.52	1,089
45	11.39	1,226
60	22.44	1,491
75	42.28	2,136
90	180.0	$\infty$

$m=90^\circ$  ( $h=1,571$ )

$\ell$	$\theta$	$k$
0°	0° 0'	1,000
15	4.6	0,968
30	8.13	0,875
45	12.21	0,724
60	16.31	0,522
75	20.45	0,277
90	90.0	0,000

$m=90^\circ$

$\ell$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$	$\beta$	$\Sigma$
0°	25°39'	1,571	1,000	1,571	1,000	0,637
15	27.46	1,577	0,964	1,517	1,038	0,659
30	34.7	1,578	0,862	1,360	1,161	0,735
45	45.12	1,580	0,703	1,111	1,423	0,900
60	62.46	1,579	0,498	0,785	2,010	1,273
75	91.48	1,574	0,258	0,407	3,872	2,460
90	180.0	1,571	0,000	0,000	$\infty$	$\infty$

### TABLEAUX XXXVI.

Projection de Schmidt.

$m=90^\circ$

$\ell$	$\theta$	$h$	$k$
0°	0° 0'	1,571	1,000
15	7.38	1,571	0,975
30	16.6	1,571	0,901
45	26.34	1,571	0,791
60	40.54	1,571	0,661
75	61.49	1,571	0,518
90	90.0	1,571	0,500

$m=90^\circ$

$\ell$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$	$\beta$	$\Sigma$
0°	25°39'	1,571	1,000	1,571	1,000	0,637
15	28.11	1,579	0,961	1,517	1,041	0,659
30	35.33	1,599	0,851	1,360	1,175	0,735
45	47.46	1,619	0,686	1,111	1,458	0,900
60	66.11	1,635	0,480	0,785	2,082	1,273
75	95.16	1,645	0,247	0,407	4,047	2,460
90	180.0	1,648	0,000	0,000	$\infty$	$\infty$

**TABLEAUX XXXVII**  
Projection de Guillaume Postel sur un meridien

*Valeurs de  $2\omega$*

<i>e</i>	<i>m</i>						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	0° 0'	0° 39'	2° 39'	6° 1'	10° 52'	17° 21'	25° 39'
15	0.39	1.18	3.15	6.33	11.18	17.36	25.39
30	2.39	3.15	5.5	8.10	12.34	18.22	25.39
45	6.1	6.33	8.10	10.52	14.41	19.37	25.39
60	10.52	11.18	12.34	14.41	17.36	21.17	25.39
75	17.21	17.36	18.22	19.37	21.17	23.20	25.39
90	25.39	25.39	25.39	25.39	25.39	25.39	25.39

*Valeurs de  $\alpha$  ou de  $S$*

<i>e</i>	<i>m</i>						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	1,000	1,011	1,047	1,111	1,209	1,355	1,571
15	1,011	1,023	1,058	1,121	1,218	1,361	1,571
30	1,047	1,058	1,093	1,153	1,246	1,380	1,571
45	1,111	1,121	1,153	1,209	1,293	1,411	1,571
60	1,209	1,218	1,246	1,293	1,361	1,453	1,571
75	1,355	1,361	1,380	1,411	1,453	1,507	1,571
90	1,571	1,571	1,571	1,571	1,571	1,571	1,571

**TABLEAUX XXXVIII.**  
Projection gnomonique méridienne

*Valeurs de  $2\omega$*

<i>e</i>	<i>m</i>						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	0° 0'	1° 59'	8° 14'	19° 45'	38° 57'	72° 9'	180° 0'
15	1.59	3.58	10.13	21.43	40.49	73.44	180.0
30	8.14	10.13	16.25	27.49	46.37	78.40	180.0
45	19.45	21.43	27.49	38.57	57.3	87.22	180.0
60	38.57	40.49	46.37	57.3	73.44	100.51	180.0
75	72.9	73.44	78.40	87.22	100.51	121.57	180.0
90	180.0	180.0	180.0	180.0	180.0	180.0	180.0

Valeurs de  $a$

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,000	1,072	1,333	2,000	4,000	14,93	$\infty$
15	1,072	1,149	1,429	2,144	4,287	16,00	$\infty$
30	1,333	1,429	1,778	2,667	5,333	19,90	$\infty$
45	2,000	2,144	2,667	4,000	8,000	29,86	$\infty$
60	4,000	4,287	5,333	8,000	16,00	59,71	$\infty$
75	14,93	16,00	19,90	29,86	59,71	222,8	$\infty$
90	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$

Valeurs de  $b$

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,000	1,035	1,155	1,414	2,000	3,864	$\infty$
15	1,035	1,072	1,195	1,464	2,071	4,000	$\infty$
30	1,155	1,195	1,333	1,633	2,309	4,461	$\infty$
45	1,414	1,464	1,633	2,000	2,828	5,464	$\infty$
60	2,000	2,071	2,309	2,828	4,000	7,727	$\infty$
75	3,864	4,000	4,461	5,464	7,727	14,93	$\infty$
90	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$

Valeurs de  $S$ .

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,000	1,110	1,540	2,828	8,000	57,68	$\infty$
15	1,110	1,231	1,708	3,138	8,877	64,00	$\infty$
30	1,540	1,708	2,365	4,354	12,32	88,80	$\infty$
45	2,828	3,138	4,354	8,000	22,63	163,1	$\infty$
60	8,000	8,877	12,32	22,63	64,00	461,4	$\infty$
75	57,68	64,00	88,80	163,1	461,4	332,8	$\infty$
90	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$



### TABLEAUX XXXIX.

Perspective périmécoïque sur un méridien.

*Valeurs de 2 ω*

<i>e</i>	<i>m</i>						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	0° 0'	0° 28'	1° 57'	4° 39'	9° 2'	15° 59'	27° 19'
15	0.28	0.56	2.24	5.6	9.27	16.17	27.19
30	1.57	2.24	3.52	6.30	10.43	17.13	27.19
45	4.39	5.6	6.30	9.2	12.57	18.46	27.19
60	9.2	9.27	10.43	12.57	16.17	20.58	27.19
75	15.59	16.17	17.13	18.46	20.58	23.50	27.19
90	27.19	27.19	27.19	27.19	27.19	27.19	27.19

*Valeurs de a*

<i>e</i>	<i>m</i>						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	1,000	1,013	1,054	1,126	1,236	1,395	1,618
15	1,013	1,026	1,067	1,138	1,246	1,401	1,618
30	1,054	1,067	1,106	1,174	1,276	1,421	1,618
45	1,126	1,138	1,174	1,236	1,328	1,454	1,618
60	1,236	1,246	1,276	1,328	1,401	1,498	1,618
75	1,395	1,401	1,421	1,454	1,498	1,554	1,618
90	1,618	1,618	1,618	1,618	1,618	1,618	1,618

*Valeurs de b*

<i>e</i>	<i>m</i>						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	1,000	1,005	1,019	1,038	1,056	1,055	1,000
15	1,005	1,009	1,023	1,041	1,057	1,054	1,000
30	1,019	1,023	1,033	1,048	1,058	1,051	1,000
45	1,038	1,041	1,048	1,056	1,059	1,046	1,000
60	1,056	1,057	1,058	1,059	1,054	1,037	1,000
75	1,055	1,054	1,051	1,046	1,037	1,022	1,000
90	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Valeurs de  $S$ .

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,000	1,018	1,074	1,169	1,305	1,471	1,618
15	1,018	1,036	1,091	1,184	1,316	1,477	1,618
30	1,074	1,091	1,142	1,230	1,351	1,494	1,618
45	1,169	1,184	1,230	1,305	1,407	1,521	1,618
60	1,305	1,316	1,351	1,407	1,477	1,554	1,618
75	1,471	1,477	1,494	1,521	1,554	1,588	1,618
90	1,618	1,618	1,618	1,618	1,618	1,618	1,618

TABLEAUX XL.

Projection de La Hire sur un méridien.

Valeurs de  $2\omega$

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	$0^\circ 0'$	$0^\circ 31'$	$2^\circ 9'$	$5^\circ 8'$	$9^\circ 59'$	$17^\circ 42'$	$30^\circ 17'$
15	0.31	1.2	2.40	5.38	10.27	18.2	30.17
30	2.9	2.40	4.17	7.12	11.52	19.3	30.17
45	5.8	5.38	7.12	9.59	14.20	20.47	30.17
60	9.59	10.27	11.52	14.20	18.2	23.14	30.17
75	17.42	18.2	19.3	20.47	23.14	26.24	30.17
90	30.17	30.17	30.17	30.17	30.17	30.17	30.17

Valeurs de  $a$

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,000	1,013	1,052	1,121	1,227	1,377	1,586
15	1,013	1,025	1,064	1,133	1,236	1,383	1,586
30	1,052	1,064	1,102	1,167	1,265	1,402	1,586
45	1,121	1,133	1,167	1,227	1,314	1,432	1,586
60	1,227	1,236	1,265	1,314	1,383	1,474	1,586
75	1,377	1,383	1,402	1,432	1,474	1,526	1,586
90	1,586	1,586	1,586	1,586	1,586	1,586	1,586

Valeurs de  $b$

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,000	1,004	1,013	1,025	1,030	1,010	0,929
15	1,004	1,007	1,016	1,026	1,030	1,008	0,929
30	1,013	1,016	1,023	1,029	1,028	1,004	0,929
$45$	1,025	1,026	1,029	1,030	1,022	0,994	0,929
60	1,030	1,030	1,028	1,022	1,008	0,980	0,929
75	1,010	1,008	1,004	0,994	0,980	0,958	0,929
$90^\circ$	0,929	0,929	0,929	0,929	0,929	0,959	0,929

Valeurs de  $S$

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,000	1,016	1,066	1,150	1,263	1,391	1,473
15	1,016	1,032	1,081	1,162	1,273	1,395	1,473
30	1,066	1,081	1,127	1,201	1,300	1,407	1,473
$45$	1,150	1,162	1,201	1,263	1,343	1,424	1,473
60	1,263	1,273	1,300	1,343	1,395	1,444	1,473
75	1,391	1,395	1,407	1,424	1,444	1,462	1,473
$90^\circ$	1,473	1,473	1,473	1,473	1,473	1,473	1,473

Valeurs de  $(a)$

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,076	1,090	1,133	1,207	1,320	1,482	1,707
15	1,090	1,104	1,146	1,219	1,331	1,489	1,707
30	1,133	1,146	1,186	1,256	1,362	1,509	1,707
$45$	1,207	1,219	1,256	1,320	1,414	1,542	1,707
60	1,320	1,331	1,362	1,414	1,489	1,587	1,707
75	1,482	1,489	1,509	1,542	1,587	1,643	1,707
$90^\circ$	1,707	1,707	1,707	1,707	1,707	1,707	1,707

**TABLEAUX XLI.**  
 Perspective périalique méridienne.

*Valours de  $\omega$*

<i>e</i>	<i>m</i>						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	0° 0'	0° 43'	3° 0'	7° 10'	13° 58'	24° 48'	42° 47'
15	0.43	1.27	3.43	7.53	14.37	25.17	42.47
30	3.0	3.43	5.58	10.4	16.36	26.43	42.47
45	7.10	7.53	10.4	13.58	20.4	29.10	42.47
60	13.58	14.37	16.36	20.4	25.17	32.39	42.47
75	24.48	25.17	26.44	29.10	32.39	37.11	42.47
90	42.47	42.47	42.47	42.47	42.47	42.47	42.47

*Valours de 'a*

<i>e</i>	<i>m</i>						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	1,000	1,011	1,044	1,103	1,189	1,308	1,466
15	1,011	1,022	1,055	1,112	1,197	1,313	1,466
30	1,044	1,055	1,086	1,140	1,220	1,327	1,466
45	1,103	1,112	1,140	1,189	1,258	1,350	1,466
60	1,189	1,197	1,220	1,258	1,313	1,382	1,466
75	1,308	1,313	1,327	1,350	1,382	1,421	1,466
90	1,466	1,466	1,466	1,466	1,466	1,466	1,466

*Valours de b*

<i>e</i>	<i>m</i>						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0	1,000	0,998	0,991	0,973	0,931	0,846	0,682
15	0,998	0,996	0,988	0,969	0,926	0,841	0,682
30	0,991	0,988	0,979	0,957	0,912	0,829	0,682
45	0,973	0,969	0,957	0,931	0,885	0,807	0,682
60	0,931	0,926	0,912	0,885	0,822	0,776	0,682
75	0,846	0,841	0,829	0,807	0,776	0,734	0,682
90	0,682	0,682	0,682	0,682	0,682	0,682	0,682

Valeurs de  $b$

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
15	1,000	0,999	0,999	1,000	1,000	1,000	0,998
30	1,000	0,997	0,998	1,000	1,001	0,999	0,993
45	1,000	0,997	0,997	1,000	1,002	0,997	0,984
60	1,000	0,997	0,997	1,001	1,003	0,994	0,972
75	1,000	0,998	0,998	1,002	1,003	0,989	0,957
90	1,000	0,998	0,999	1,003	1,002	0,982	0,938

Valeurs de  $S$

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,000	1,016	1,063	1,143	1,254	1,396	1,571
15	1,007	1,023	1,071	1,150	1,260	1,401	1,571
30	1,026	1,043	1,093	1,173	1,281	1,415	1,571
45	1,061	1,078	1,130	1,211	1,316	1,438	1,571
60	1,111	1,130	1,185	1,268	1,367	1,471	1,571
75	1,181	1,202	1,261	1,345	1,434	1,514	1,571
90	1,273	1,297	1,361	1,445	1,521	1,567	1,571

Valeurs de  $(a)$

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,066	1,083	1,134	1,219	1,337	1,489	1,675
15	1,073	1,092	1,143	1,227	1,344	1,495	1,678
30	1,095	1,115	1,168	1,251	1,365	1,511	1,687
45	1,131	1,154	1,209	1,292	1,401	1,539	1,702
60	1,185	1,209	1,268	1,351	1,454	1,578	1,723
75	1,259	1,285	1,348	1,431	1,525	1,632	1,751
90	1,358	1,385	1,454	1,536	1,619	1,701	1,787

**TABLEAUX XXXIII**  
Projection de l'Astronomie populaire d'Araço.

*Valeurs de 2ω*

<i>e</i>	<i>m</i>						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	0° 0'	0° 0'	0° 0'	0° 0'	0° 0'	0° 0'	0° 0'
15	1.11	1.58	3.24	4.56	6.29	8.4	9.38
30	4.52	5.51	8.5	10.50	13.46	16.47	19.49
45	11.36	12.36	15.14	18.46	22.46	26.59	31.16
60	22.43	23.43	26.28	30.25	35.6	40.9	45.21
75	42.28	43.24	46.3	50.0	54.51	60.11	65.42
90	180.0	180.0	180.0	180.0	180.0	180.0	180.0

*Valeurs de a*

<i>e</i>	<i>m</i>						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
15	1,021	1,028	1,041	1,055	1,069	1,084	1,099
30	1,089	1,098	1,120	1,147	1,177	1,208	1,241
45	1,225	1,236	1,264	1,305	1,352	1,404	1,459
60	1,491	1,504	1,541	1,597	1,667	1,746	1,833
75	2,136	2,154	2,209	2,294	2,405	2,536	2,683
90	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

*Valeurs de b*

<i>e</i>	<i>m</i>						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
15	1,000	0,993	0,981	0,968	0,955	0,942	0,929
30	1,000	0,991	0,972	0,949	0,925	0,901	0,877
45	1,000	0,991	0,969	0,939	0,906	0,873	0,839
60	1,000	0,991	0,967	0,933	0,894	0,854	0,813
75	1,000	0,991	0,967	0,931	0,888	0,842	0,796
90	1,000	0,992	0,967	0,931	0,886	0,837	0,786

<i>e</i>	<i>S</i>
0°	1,000
15	1,021
30	1,089
45	1,225
60	1,491
75	2,136
90	∞

Valeurs de  $\beta$

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
15	1,000	1,007	1,020	1,033	1,047	1,062	1,077
30	1,000	1,009	1,029	1,054	1,081	1,110	1,140
45	1,000	1,009	1,032	1,065	1,104	1,146	1,191
60	1,000	1,009	1,034	1,071	1,118	1,171	1,230
75	1,000	1,009	1,034	1,074	1,126	1,187	1,256
90	1,000	1,009	1,034	1,074	1,129	1,195	1,272

Valeurs de  $(a)$

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,272	1,272	1,272	1,272	1,272	1,272	1,272
15	1,298	1,307	1,323	1,341	1,360	1,378	1,398
30	1,384	1,396	1,424	1,458	1,496	1,537	1,578
45	1,557	1,571	1,608	1,659	1,719	1,785	1,855
60	1,895	1,912	1,960	2,031	2,119	2,220	2,331
75	2,716	2,740	2,809	2,917	3,058	3,224	3,412
90	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$

TABLEAUX XXXIV.

Seconde projection du P. Fournier.

$m = 0$

$e$	$2\omega$	$a$	$b$
$0^\circ$	$25^\circ 39'$	1,253	0,798
15	$23.43$	1,211	0,798
30	$17.34$	1,085	0,798
45	6.1	0,886	0,798
60	$13.48$	0,798	0,627
75	$49.55$	0,798	0,324
90	180.0	0,798	0,000

$m = 90^\circ$

$e$	$2\omega$	$a$	$b$
$0^\circ$	$25^\circ 39'$	1,253	0,798
15	$29.54$	1,280	0,755
30	$40.39$	1,334	0,648
45	$55.48$	1,397	0,506
60	$75.42$	1,445	0,346
75	$103.54$	1,475	0,175
90	180.0	1,486	0,000

$e$	S	$\Sigma$
$0^\circ$	1,000	1,000
15	0,966	1,035
30	0,866	1,155
45	0,707	1,414
60	0,500	2,000
75	0,259	3,864
90	0,000	$\infty$

**TABLEAUX XXXV.**

Première projection du P. Fournier.

$m=0$  ( $\theta=0, b=1, S=a$ )

$\ell$	$2\omega$	$a$
0°	0° 0'	1,000
15	1.11	1,021
30	4.52	1,089
45	11.39	1,226
60	22.44	1,491
75	42.28	2,136
90	180.0	$\infty$

$m=90^\circ$  ( $h=1,571$ )

$\ell$	$\theta$	$k$
0°	0° 0'	1,000
15	4.6	0,968
30	8.13	0,875
45	12.21	0,724
60	16.31	0,522
75	20.45	0,277
90	90.0	0,000

$m=90^\circ$

$\ell$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$	$\beta$	$\Sigma$
0°	25° 39'	1,571	1,000	1,571	1,000	0,637
15	27.46	1,577	0,964	1,517	1,038	0,659
30	34.7	1,578	0,862	1,360	1,161	0,735
45	45.12	1,580	0,703	1,111	1,423	0,900
60	62.46	1,579	0,498	0,785	2,010	1,273
75	91.48	1,574	0,258	0,407	3,872	2,460
90	180.0	1,571	0,000	0,000	$\infty$	$\infty$

**TABLEAUX XXXVI.**

Projection de Schmidt.

$m=90^\circ$

$\ell$	$\theta$	$h$	$k$
0°	0° 0'	1,571	1,000
15	7.38	1,571	0,975
30	16.6	1,571	0,901
45	26.34	1,571	0,791
60	40.54	1,571	0,661
75	61.49	1,571	0,548
90	90.0	1,571	0,500

$m=90^\circ$

$\ell$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$	$\beta$	$\Sigma$
0°	25° 39'	1,571	1,000	1,571	1,000	0,637
15	28.11	1,579	0,961	1,517	1,041	0,659
30	35.33	1,599	0,851	1,360	1,175	0,735
45	47.46	1,619	0,686	1,111	1,458	0,900
60	66.11	1,635	0,480	0,785	2,082	1,273
75	95.16	1,645	0,247	0,407	4,047	2,460
90	180.0	1,648	0,000	0,000	$\infty$	$\infty$



### TABLEAUX XXXVII

Projection de Guillaume Postel sur un meridien

Valeurs de  $2\omega$

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	$0^\circ 0'$	$0^\circ 39'$	$2^\circ 39'$	$6^\circ 1'$	$10^\circ 52'$	$17^\circ 21'$	$25^\circ 39'$
15	0.39	1.18	3.15	6.33	11.18	17.36	25.39
30	2.39	3.15	5.5	8.10	12.34	18.22	25.39
45	6.1	6.33	8.10	10.52	14.41	19.37	25.39
60	10.52	11.18	12.34	14.41	17.36	21.17	25.39
75	17.21	17.36	18.22	19.37	21.17	23.20	25.39
90	25.39	25.39	25.39	25.39	25.39	25.39	25.39

Valeurs de  $A$  ou de  $S$

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,000	1,011	1,047	1,111	1,209	1,355	1,571
15	1,011	1,023	1,058	1,121	1,218	1,361	1,571
30	1,047	1,058	1,093	1,153	1,246	1,380	1,571
45	1,111	1,121	1,153	1,209	1,293	1,411	1,571
60	1,209	1,218	1,246	1,293	1,361	1,453	1,571
75	1,355	1,361	1,380	1,411	1,453	1,507	1,571
90	1,571	1,571	1,571	1,571	1,571	1,571	1,571

### TABLEAUX XXXVIII.

Projection gnomonique méridienne

Valeurs de  $2\omega$

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	$0^\circ 0'$	$1^\circ 59'$	$8^\circ 14'$	$19^\circ 45'$	$38^\circ 57'$	$72^\circ 9'$	$180^\circ 0'$
15	1.59	3.58	10.13	21.43	40.49	73.44	180.0
30	8.14	10.13	16.25	27.49	46.37	78.40	180.0
45	19.45	21.43	27.49	38.57	57.3	87.22	180.0
60	38.57	40.49	46.37	57.3	73.44	100.51	180.0
75	72.9	73.44	78.40	87.22	100.51	121.57	180.0
90	180.0	180.0	180.0	180.0	180.0	180.0	180.0

*Valeurs de a*

<i>e</i>	<i>m</i>						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	1,000	1,072	1,333	2,000	4,000	14,93	∞
15	1,072	1,149	1,429	2,144	4,287	16,00	∞
30	1,333	1,429	1,778	2,667	5,333	19,90	∞
45	2,000	2,144	2,667	4,000	8,000	29,86	∞
60	4,000	4,287	5,333	8,000	16,00	59,71	∞
75	14,93	16,00	19,90	29,86	59,71	222,8	∞
90	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

*Valeurs de b*

<i>e</i>	<i>m</i>						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	1,000	1,035	1,155	1,414	2,000	3,864	∞
15	1,035	1,072	1,195	1,464	2,071	4,000	∞
30	1,155	1,195	1,333	1,633	2,309	4,461	∞
45	1,414	1,464	1,633	2,000	2,828	5,464	∞
60	2,000	2,071	2,309	2,828	4,000	7,727	∞
75	3,864	4,000	4,461	5,464	7,727	14,93	∞
90	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

*Valeurs de S.*

<i>e</i>	<i>m</i>						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	1,000	1,110	1,540	2,828	8,000	57,68	∞
15	1,110	1,231	1,708	3,138	8,877	64,00	∞
30	1,540	1,708	2,365	4,354	12,32	88,80	∞
45	2,828	3,138	4,354	8,000	22,63	163,1	∞
60	8,000	8,877	12,32	22,63	64,00	461,4	∞
75	57,68	64,00	88,80	163,1	461,4	332,8	∞
90	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

TABLEAUX XXXIX.

Perspective périmécœique sur un méridien.

Valeurs de  $2\omega$

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	$0^\circ 0'$	$0^\circ 28'$	$1^\circ 57'$	$4^\circ 39'$	$9^\circ 2'$	$15^\circ 59'$	$27^\circ 19'$
15	0.28	0.56	2.24	5.6	9.27	16.17	27.19
30	1.57	2.24	3.52	6.30	10.43	17.13	27.19
45	4.39	5.6	6.30	9.2	12.57	18.46	27.19
60	9.2	9.27	10.43	12.57	16.17	20.58	27.19
75	15.59	16.17	17.13	18.46	20.58	23.50	27.19
90	27.19	27.19	27.19	27.19	27.19	27.19	27.19

Valeurs de  $a$

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1.0000	1.013	1.054	1.126	1.236	1.395	1.618
15	1.013	1.026	1.067	1.138	1.246	1.401	1.618
30	1.054	1.067	1.106	1.174	1.276	1.421	1.618
45	1.126	1.138	1.174	1.236	1.328	1.454	1.618
60	1.236	1.246	1.276	1.328	1.401	1.498	1.618
75	1.395	1.401	1.421	1.454	1.498	1.554	1.618
90	1.618	1.618	1.618	1.618	1.618	1.618	1.618

Valeurs de  $b$

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1.0000	1.005	1.019	1.038	1.056	1.055	1.000
15	1.005	1.009	1.023	1.041	1.057	1.054	1.000
30	1.019	1.023	1.033	1.048	1.058	1.051	1.000
45	1.038	1.041	1.048	1.056	1.059	1.046	1.000
60	1.056	1.057	1.058	1.059	1.054	1.037	1.000
75	1.055	1.054	1.051	1.046	1.037	1.022	1.000
90	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

*Valeurs de S*

<i>e</i>	<i>m</i>						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	1,000	1,018	1,07½	1,169	1,305	1,471	1,618
15	1,018	1,036	1,091	1,18½	1,316	1,477	1,618
30	1,07½	1,091	1,142	1,230	1,351	1,49½	1,618
45	1,169	1,18½	1,230	1,305	1,407	1,521	1,618
60	1,305	1,316	1,351	1,407	1,477	1,55½	1,618
75	1,471	1,477	1,49½	1,521	1,55½	1,588	1,618
90	1,618	1,618	1,618	1,618	1,618	1,618	1,618

**TABLEAUX XL.**

Projection de La Hire sur un méridien.

*Valeurs de 2ω*

<i>e</i>	<i>m</i>						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	0° 0'	0° 31'	2° 9'	5° 8'	9° 59'	17° 42'	30° 17'
15	0.31	1.2	2.40	5.38	10.27	18.2	30.17
30	2.9	2.40	4.17	7.12	11.52	19.3	30.17
45	5.8	5.38	7.12	9.59	14.20	20.47	30.17
60	9.59	10.27	11.52	14.20	18.2	23.1½	30.17
75	17.42	18.2	19.3	20.47	23.1½	26.24	30.17
90	30.17	30.17	30.17	30.17	30.17	30.17	30.17

*Valeurs de α*

<i>e</i>	<i>m</i>						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	1,000	1,013	1,052	1,121	1,227	1,377	1,586
15	1,013	1,025	1,06½	1,133	1,236	1,383	1,586
30	1,052	1,06½	1,102	1,167	1,265	1,402	1,586
45	1,121	1,133	1,167	1,227	1,314	1,432	1,586
60	1,227	1,236	1,265	1,314	1,383	1,474	1,586
75	1,377	1,383	1,402	1,432	1,474	1,526	1,586
90	1,586	1,586	1,586	1,586	1,586	1,586	1,586

Valeurs de  $b$

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,000	1,004	1,013	1,025	1,030	1,040	0,929
15	1,004	1,007	1,016	1,026	1,030	1,008	0,929
30	1,013	1,016	1,023	1,029	1,028	1,004	0,929
$45$	1,025	1,026	1,029	1,030	1,022	0,994	0,929
60	1,030	1,030	1,028	1,022	1,008	0,980	0,929
75	1,040	1,008	1,004	0,994	0,980	0,958	0,929
90	0,929	0,929	0,929	0,929	0,929	0,959	0,929

Valeurs de  $S$

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,000	1,016	1,066	1,150	1,263	1,391	1,473
15	1,016	1,032	1,081	1,162	1,273	1,395	1,473
30	1,066	1,081	1,127	1,201	1,300	1,407	1,473
$45$	1,150	1,162	1,201	1,263	1,343	1,424	1,473
60	1,263	1,273	1,300	1,343	1,395	1,444	1,473
75	1,391	1,395	1,407	1,424	1,444	1,462	1,473
90	1,473	1,473	1,473	1,473	1,473	1,473	1,473

Valeurs de  $(a)$

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,076	1,090	1,133	1,207	1,320	1,482	1,707
15	1,090	1,104	1,146	1,219	1,331	1,489	1,707
30	1,133	1,146	1,186	1,256	1,362	1,509	1,707
$45$	1,207	1,219	1,256	1,320	1,414	1,542	1,707
60	1,320	1,331	1,362	1,414	1,489	1,587	1,707
75	1,482	1,489	1,509	1,542	1,587	1,643	1,707
90	1,707	1,707	1,707	1,707	1,707	1,707	1,707

**TABLEAUX XLI.**  
 Perspective périalique méridienne.

*Valeurs de  $z \omega$*

<i>e</i>	<i>m</i>						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	0° 0'	0° 43'	3° 0'	7° 10'	13° 58'	24° 48'	42° 47'
15	0.43	1.27	3.43	7.53	14.37	25.17	42.47
30	3.0	3.43	5.58	10.4	16.36	26.43	42.47
45	7.10	7.53	10.4	13.58	20.4	29.10	42.47
60	13.58	14.37	16.36	20.4	25.17	32.39	42.47
75	24.48	25.17	26.44	29.10	32.39	37.11	42.47
90	42.47	42.47	42.47	42.47	42.47	42.47	42.47

*Valeurs de 'a*

<i>e</i>	<i>m</i>						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	1,000	1,011	1,044	1,103	1,189	1,308	1,466
15	1,011	1,022	1,055	1,112	1,197	1,313	1,466
30	1,044	1,055	1,086	1,140	1,220	1,327	1,466
45	1,103	1,112	1,140	1,189	1,258	1,350	1,466
60	1,189	1,197	1,220	1,258	1,313	1,382	1,466
75	1,308	1,313	1,327	1,350	1,382	1,421	1,466
90	1,466	1,466	1,466	1,466	1,466	1,466	1,466

*Valeurs de b*

<i>e</i>	<i>m</i>						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0	1,000	0,998	0,991	0,973	0,931	0,846	0,682
15	0,998	0,996	0,988	0,969	0,926	0,841	0,682
30	0,991	0,988	0,979	0,957	0,912	0,829	0,682
45	0,973	0,969	0,957	0,931	0,885	0,807	0,682
60	0,931	0,926	0,912	0,885	0,822	0,776	0,682
75	0,846	0,841	0,829	0,807	0,776	0,734	0,682
90	0,682	0,682	0,682	0,682	0,682	0,682	0,682

Valeurs de S

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,000	1,009	1,035	1,072	1,107	1,106	1,000
15	1,009	1,018	1,043	1,077	1,109	1,105	1,000
30	1,035	1,043	1,063	1,091	1,112	1,100	1,000
45	1,072	1,077	1,091	1,107	1,114	1,090	1,000
60	1,107	1,109	1,112	1,114	1,079	1,072	1,000
75	1,106	1,105	1,100	1,090	1,072	1,043	1,000
90	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Valeurs de ( $\omega$ )

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,466	1,482	1,531	1,616	1,742	1,917	2,248
15	1,482	1,498	1,546	1,630	1,754	1,924	2,248
30	1,531	1,546	1,592	1,672	1,788	1,945	2,248
45	1,616	1,630	1,672	1,742	1,845	1,979	2,248
60	1,742	1,754	1,788	1,845	1,924	2,026	2,248
75	1,917	1,924	1,945	1,979	2,026	2,083	2,248
90	2,248	2,248	2,248	2,248	2,248	2,248	2,248

TABLEAUX XLII.

Projection orthographe méridienne

Valeurs de  $2\omega$

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	$0^\circ 0'$	$1^\circ 59'$	$8^\circ 14'$	$19^\circ 45'$	$38^\circ 57'$	$72^\circ 9'$	$180^\circ 0'$
15	1.59	3.58	10.13	21.43	40.49	73.44	180.0
30	8.14	10.13	16.25	27.49	46.37	78.40	180.0
45	19.45	21.43	27.49	38.57	57.3	87.22	180.0
60	38.57	40.49	46.37	57.3	73.44	100.51	180.0
75	72.9	73.44	78.40	87.22	100.51	121.57	180.0
90	180.0	180.0	180.0	180.0	180.0	180.0	180.0

Valeurs de  $b$  ou de  $S$ .

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,000	0,966	0,866	0,707	0,500	0,259	0,000
15	0,966	0,933	0,837	0,683	0,483	0,250	0,000
30	0,866	0,837	0,750	0,612	0,433	0,224	0,000
45	0,707	0,683	0,612	0,500	0,354	0,183	0,000
60	0,500	0,483	0,433	0,354	0,250	0,129	0,000
75	0,259	0,250	0,224	0,183	0,129	0,067	0,000
90	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Valeurs de  $\beta$  ou de  $\Sigma$

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,000	1,035	1,155	1,414	2,000	3,864	$\infty$
15	1,035	1,072	1,195	1,464	2,071	4,000	$\infty$
30	1,155	1,195	1,333	1,633	2,309	4,461	$\infty$
45	1,414	1,464	1,633	2,000	2,828	5,464	$\infty$
60	2,000	2,071	2,309	2,828	4,000	7,727	$\infty$
75	3,864	4,000	4,461	5,464	7,727	14,93	$\infty$
90	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$

TABLEAUX XLIII.

Projections centrales autres que les perspectives.

Projection authalique de Lambert.

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$	$(a)$
$0^\circ$	$0^\circ 0'$	1,000	1,000	1,000	1,414
15	0.59	1,009	0,991	1,000	1,423
30	3.58	1,035	0,966	1,000	1,464
45	9.4	1,082	0,924	1,000	1,531
60	16.26	1,155	0,866	1,000	1,633
75	26.17	1,260	0,793	1,000	1,783
90	38.57	1,414	0,707	1,000	2,000



Projection de Postel.

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000
15	0.39	1,011	1,000	1,011
30	2.39	1,047	1,000	1,047
45	6.1	1,111	1,000	1,111
60	10.52	1,209	1,000	1,209
75	17.21	1,355	1,000	1,355
90	25.39	1,571	1,000	1,571

Projection de M<sup>r</sup> Airy.

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000
15	0.29	1,013	1,004	1,017
30	1.57	1,054	1,018	1,073
45	4.17	1,126	1,045	1,177
60	7.25	1,242	1,091	1,355
75	11.3	1,419	1,170	1,660
90	14.48	1,693	1,307	2,213

TABLEAUX XLIV.

Perspectives.

D = 0

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000
15	1.59	1,072	1,035	1,110
30	8.14	1,333	1,155	1,540
45	19.45	2,000	1,414	2,828
60	38.57	4,000	2,000	8,000
75	72.9	14.93	3,864	57.68
90	180.0	$\infty$	$\infty$	$\infty$

D = 1

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000
15	0.0	1,017	1,017	1,035
30	0.0	1,072	1,072	1,149
45	0.0	1,172	1,172	1,373
60	0.0	1,333	1,333	1,778
75	0.0	1,589	1,589	2,524
90	0.0	2,000	2,000	4,000

$D = 1 + \frac{11}{30} = 1,3666\dots$

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000
15	0.18	1,015	1,009	1,024
30	1.16	1,060	1,037	1,099
45	3.3	1,141	1,082	1,235
60	5.55	1,268	1,143	1,450
75	10.28	1,456	1,213	1,766
90	17.50	1,732	1,267	2,195

$D = 1 + \frac{1}{2} = 1,5$

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000
15	0.24	1,014	1,007	1,121
30	1.39	1,057	1,027	1,085
45	3.56	1,133	1,058	1,198
60	7.39	1,250	1,094	1,367
75	13.32	1,422	1,121	1,593
90	23.4	1,667	1,111	1,852

$D = \frac{\pi}{2} = 1,57079\dots$

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000
15	0.26	1,013	1,005	1,019
30	1.50	1,055	1,022	1,078
45	4.22	1,128	1,046	1,180
60	8.29	1,241	1,070	1,329
75	15.1	1,405	1,080	1,518
90	25.39	1,637	1,043	1,706

$D = 1,595$

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000
15	0.27	1,013	1,005	1,019
30	1.53	1,054	1,020	1,076
45	4.31	1,127	1,042	1,174
60	8.46	1,239	1,063	1,316
75	15.31	1,400	1,067	1,493
90	26.31	1,627	1,020	1,660

D-1,6

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000
15	0.28	1,013	1,005	1,019
30	1.54	1,054	1,020	1,075
45	4.32	1,127	1,041	1,173
60	8.49	1,238	1,061	1,314
75	15.37	1,399	1,064	1,488
90	26.41	1,625	1,016	1,650

$D = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1,6180\dots$

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000
15	0.28	1,013	1,005	1,018
30	1.57	1,054	1,019	1,074
45	4.39	1,126	1,038	1,169
60	9.2	1,236	1,056	1,305
75	15.59	1,395	1,055	1,471
90	27.19	1,618	1,000	1,618

D-1,69

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$	(a)
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000	1,062
15	0.31	1,013	1,004	1,017	1,075
30	2.7	1,052	1,014	1,068	1,117
45	5.3	1,122	1,028	1,153	1,191
60	9.49	1,228	1,035	1,271	1,304
75	17.22	1,380	1,018	1,406	1,465
90	29.44	1,592	0,942	1,499	1,690

$D = 1 + \sin 45^\circ = 1,7071\dots$

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$	(a)
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000	1,076
15	0.31	1,013	1,004	1,016	1,090
30	2.9	1,052	1,013	1,066	1,133
45	5.8	1,121	1,025	1,150	1,207
60	9.59	1,227	1,030	1,263	1,320
75	17.42	1,377	1,010	1,391	1,482
90	30.17	1,586	0,929	1,473	1,707

$D = \sqrt{3} = 1,7321\dots$

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$	(a)
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000	1,098
15	0.32	1,013	1,003	1,016	1,112
30	2.12	1,052	1,012	1,064	1,155
45	5.16	1,120	1,022	1,144	1,230
60	10.15	1,224	1,023	1,253	1,341
75	18.9	1,372	0,998	1,370	1,507
90	31.5	1,577	0,911	1,437	1,732

D = 2

$\delta$	2( $\omega$ )	$a$	$b$	S	$\beta$	( $a$ )
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000	1,000	1,333
15	0, 40	1,011	1,000	1,011	1,000	1,349
30	2, 45	1,047	0,998	1,044	1,002	1,396
45	6, 33	1,108	0,988	1,095	1,012	1,478
60	12, 46	1,200	0,960	1,152	1,042	1,600
75	22, 39	1,328	0,892	1,185	1,121	1,771
90	38, 57	1,500	0,750	1,125	1,333	2,000

D = 2,1

$\delta$	2( $\omega$ )	$a$	$b$	S	$\beta$	( $a$ )
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000	1,000	1,423
15	0, 42	1,011	0,999	1,010	1,001	1,438
30	2, 55	1,045	0,993	1,038	1,007	1,487
45	6, 59	1,104	0,978	1,080	1,023	1,571
60	13, 55	1,192	0,940	1,121	1,064	1,696
75	24, 7	1,314	0,860	1,128	1,122	1,870
90	41, 34	1,476	0,703	1,040	1,142	2,100

D = 2,105

$\delta$	2( $\omega$ )	$a$	$b$	S	$\beta$	( $a$ )
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000	1,000	1,427
15	0, 42	1,011	0,999	1,010	1,001	1,443
30	2, 56	1,045	0,993	1,038	1,007	1,491
45	7, 0	1,107	0,979	1,084	1,021	1,579
60	13, 38	1,192	0,939	1,119	1,065	1,701
75	24, 11	1,314	0,858	1,113	1,165	1,875
90	41, 42	1,475	0,707	1,034	1,127	2,105

D = 2 +  $\frac{1}{10} \sqrt{2} = 2,1414\dots$

$\delta$	2( $\omega$ )	$a$	$b$	S	$\beta$	( $a$ )
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000	1,000	1,460
15	0, 43	1,011	1,998	1,009	1,002	1,476
30	2, 59	1,045	1,991	1,036	1,009	1,525
45	7, 9	1,103	0,973	1,073	1,027	1,610
60	13, 55	1,189	0,932	1,109	1,072	1,736
75	24, 42	1,309	0,847	1,109	1,180	1,911
90	42, 37	1,467	0,685	1,005	1,460	2,141

$$D = 2,148$$

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$	$\beta$	$(a)$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000	1,000	1,466
15	0.43	1,011	0,998	1,009	1,002	1,482
30	3.0	1,044	0,991	1,035	1,009	1,531
45	7.10	1,103	0,973	1,072	1,028	1,616
60	13.58	1,189	0,931	1,107	1,074	1,742
75	24.48	1,308	0,846	1,106	1,183	1,917
90	42.47	1,466	0,682	1,000	1,466	2,148

$$D = -1 + \sqrt{3} = 2,7321\dots$$

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$	$\beta$	$\Sigma$	$(a)$	$(S)$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	2,000	1,464
15	0.55	1,009	0,993	1,002	1,007	0,998	2,018	1,467
30	3.49	1,037	0,970	1,006	1,031	0,994	2,074	1,473
45	9.8	1,085	0,925	1,004	1,081	0,996	2,170	1,470
60	17.48	1,155	0,845	0,976	1,183	1,025	2,309	1,429
75	31.43	1,248	0,712	0,889	1,404	1,125	2,496	1,301
90	55.18	1,366	0,500	0,683	2,000	1,464	2,732	1,000

$$D = \infty \quad (a=1, S=b, \Sigma=\beta)$$

$\delta$	$2\omega$	$b$	$\beta$
0°	0° 0'	1,000	1,000
15	1.59	0,966	1,035
30	8.14	0,866	1,155
45	19.45	0,707	1,414
60	38.57	0,500	2,000
75	72.9	0,259	3,864
90	180.0	0,000	$\infty$

D	$z$	$z, 1$	$z, 105$	$z, 1414\dots$	$z, 148$
$\delta_\mu$	75° 31' 21"	70° 23' 2"	70° 7' 43"	68° 16' 10"	67° 56' 2"
$S_\mu$	1.1852	1.1339	1.1327	1.1166	1.1141

### TABLEAUX XLV.

Valeurs des éléments de la déformation de 5 en 5 degrés  
de colatitude pour cinq des projections centrales.

#### Projection authalique de Lambert.

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$	$(a)$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000	1,414
5	0.7	1,001	0,999	1,000	1,416
10	0.26	1,004	0,996	1,000	1,420
15	0.59	1,009	0,991	1,000	1,423
20	2.13	1,015	0,985	1,000	1,436
25	2.45	1,024	0,976	1,000	1,449
30	3.58	1,035	0,966	1,000	1,464
35	5.26	1,049	0,954	1,000	1,483
40	7.7	1,064	0,940	1,000	1,505
45	9.4	1,082	0,924	1,000	1,531
50	11.15	1,103	0,906	1,000	1,560
55	13.42	1,127	0,887	1,000	1,594
60	16.26	1,155	0,866	1,000	1,633
65	19.25	1,186	0,843	1,000	1,677
70	22.43	1,221	0,819	1,000	1,726
75	26.17	1,260	0,793	1,000	1,783
80	30.11	1,305	0,766	1,000	1,846
85	34.24	1,356	0,737	1,000	1,918
90	38.57	1,414	0,707	1,000	2,000

#### Projection de G. Postel.

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000
5	0.4	1,001	1,000	1,001
10	0.17	1,005	1,000	1,005
15	0.39	1,011	1,000	1,011
20	1.10	1,021	1,000	1,021
25	1.50	1,032	1,000	1,032
30	2.39	1,047	1,000	1,047
35	3.37	1,065	1,000	1,065
40	4.44	1,086	1,000	1,086
45	6.1	1,111	1,000	1,111
50	7.27	1,139	1,000	1,139
55	9.5	1,172	1,000	1,172
60	10.52	1,209	1,000	1,209
65	12.50	1,252	1,000	1,252
70	15.0	1,300	1,000	1,300
75	17.21	1,355	1,000	1,355
80	19.14	1,418	1,000	1,418
85	22.40	1,489	1,000	1,489
90	25.39	1,571	1,000	1,571

### Projection stéréographique.

δ	2 ω	a	b	S
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000
5	0 . 0	1,002	1,002	1,004
10	0 . 0	1,008	1,008	1,015
15	0 . 0	1,017	1,017	1,035
20	0 . 0	1,031	1,031	1,063
25	0 . 0	1,049	1,049	1,101
30	0 . 0	1,072	1,072	1,149
35	0 . 0	1,099	1,099	1,209
40	0 . 0	1,132	1,132	1,282
45	0 . 0	1,172	1,172	1,373
50	0 . 0	1,217	1,217	1,482
55	0 . 0	1,271	1,271	1,615
60	0 . 0	1,333	1,333	1,778
65	0 . 0	1,406	1,406	1,976
70	0 . 0	1,490	1,490	2,221
75	0 . 0	1,589	1,589	2,524
80	0 . 0	1,704	1,704	2,904
85	0 . 0	1,840	1,840	3,384
90	0 . 0	2,000	2,000	4,000

### Perspective périmécoïque.

$$D=1+\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)=1,6180\dots$$

δ	2 ω	a	b	S
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000
5	0 . 3	1,001	1,001	1,002
10	0 . 12	1,006	1,002	1,008
15	0 . 28	1,013	1,005	1,018
20	0 . 50	1,024	1,009	1,032
25	1 . 20	1,037	1,013	1,051
30	1 . 57	1,054	1,019	1,074
35	2 . 41	1,074	1,025	1,101
40	3 . 35	1,098	1,032	1,133
45	4 . 39	1,126	1,038	1,169
50	5 . 53	1,158	1,045	1,210
55	7 . 20	1,195	1,051	1,251
60	9 . 2	1,236	1,056	1,305
65	11 . 0	1,283	1,060	1,360
70	13 . 18	1,336	1,059	1,414
75	15 . 59	1,395	1,055	1,471
80	19 . 8	1,461	1,045	1,527
85	22 . 52	1,535	1,027	1,577
90	27 . 19	1,618	1,000	1,618

Valeurs de S

<i>e</i>	<i>m</i>						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	1,000	1,009	1,035	1,072	1,107	1,106	1,000
15	1,009	1,018	1,043	1,077	1,109	1,105	1,000
30	1,035	1,043	1,063	1,091	1,112	1,100	1,000
45	1,072	1,077	1,091	1,107	1,114	1,090	1,000
60	1,107	1,109	1,112	1,114	1,079	1,072	1,000
75	1,106	1,105	1,100	1,090	1,072	1,043	1,000
90	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Valeurs de (a)

<i>e</i>	<i>m</i>						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	1,466	1,482	1,531	1,616	1,742	1,917	2,148
15	1,482	1,498	1,546	1,630	1,754	1,924	2,148
30	1,531	1,546	1,592	1,672	1,788	1,945	2,148
45	1,616	1,630	1,672	1,742	1,845	1,979	2,148
60	1,742	1,754	1,788	1,845	1,924	2,026	2,148
75	1,917	1,924	1,945	1,979	2,026	2,083	2,148
90	2,148	2,148	2,148	2,148	2,148	2,148	2,148

TABLEAUX XLII.

Projection orthographique méridienne

Valeurs de 2 ω

<i>e</i>	<i>m</i>						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	0° 0'	1° 59'	8° 14'	19° 45'	38° 57'	72° 9'	180° 0'
15	1.59	3.58	10.13	21.43	40.49	73.44	180.0
30	8.14	10.13	16.25	27.49	46.37	78.40	180.0
45	19.45	21.43	27.49	38.57	57.3	87.22	180.0
60	38.57	40.49	46.37	57.3	73.44	100.51	180.0
75	72.9	73.44	78.40	87.22	100.51	121.57	180.0
90	180.0	180.0	180.0	180.0	180.0	180.0	180.0

Valeurs de  $b$  ou de  $S$ .

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,000	0,966	0,866	0,707	0,500	0,259	0,000
15	0,966	0,933	0,837	0,683	0,483	0,250	0,000
30	0,866	0,837	0,750	0,612	0,433	0,224	0,000
45	0,707	0,683	0,612	0,500	0,354	0,183	0,000
60	0,500	0,483	0,433	0,354	0,250	0,129	0,000
75	0,259	0,250	0,224	0,183	0,129	0,067	0,000
90	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Valeurs de  $\beta$  ou de  $\Sigma$

$e$	$m$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	1,000	1,035	1,155	1,414	2,000	3,864	$\infty$
15	1,035	1,072	1,195	1,464	2,071	4,000	$\infty$
30	1,155	1,195	1,333	1,633	2,309	4,461	$\infty$
45	1,414	1,464	1,633	2,000	2,828	5,464	$\infty$
60	2,000	2,071	2,309	2,828	4,000	7,727	$\infty$
75	3,864	4,000	4,461	5,464	7,727	14,93	$\infty$
90	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$

TABLEAUX XLIII.

Projections centrales autres que les perspectives.

Projection authalique de Lambert.

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$	$(a)$
$0^\circ$	$0^\circ 0'$	1,000	1,000	1,000	1,414
15	0.59	1,009	0,991	1,000	1,423
30	3.58	1,035	0,966	1,000	1,464
45	9.4	1,082	0,924	1,000	1,531
60	16.26	1,155	0,866	1,000	1,633
75	26.17	1,260	0,793	1,000	1,783
90	38.57	1,414	0,707	1,000	2,000



Projection de Postel.

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000
15	0.39	1,011	1,000	1,011
30	2.39	1,047	1,000	1,047
45	6.1	1,111	1,000	1,111
60	10.52	1,209	1,000	1,209
75	17.21	1,355	1,000	1,355
90	25.39	1,571	1,000	1,571

Projection de M<sup>r</sup> Airy.

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000
15	0.29	1,013	1,004	1,017
30	1.57	1,054	1,018	1,073
45	4.17	1,126	1,045	1,177
60	7.25	1,242	1,091	1,355
75	11.3	1,419	1,170	1,660
90	14.48	1,693	1,307	2,213

TABLEAUX XLIV.

## Perspectives.

D=0

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000
15	1.59	1,072	1,035	1,110
30	8.14	1,333	1,155	1,540
45	19.45	2,000	1,414	2,828
60	38.57	4,000	2,000	8,000
75	72.9	14.93	3,864	57,68
90	180.0	$\infty$	$\infty$	$\infty$

D=-1

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000
15	0.0	1,017	1,017	1,035
30	0.0	1,072	1,072	1,149
45	0.0	1,172	1,172	1,373
60	0.0	1,333	1,333	1,778
75	0.0	1,589	1,589	2,524
90	0.0	2,000	2,000	4,000

 $D = -1 + \frac{11}{30} = -1,3666\dots$ 

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000
15	0.18	1,015	1,009	1,024
30	1.16	1,060	1,037	1,099
45	3.3	1,141	1,082	1,235
60	5.55	1,268	1,143	1,450
75	10.28	1,456	1,213	1,766
90	17.50	1,732	1,267	2,195

 $D = -1 + \frac{1}{2} = -1,5$ 

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000
15	0.24	1,014	1,007	1,121
30	1.39	1,057	1,027	1,085
45	3.56	1,133	1,058	1,198
60	7.39	1,250	1,094	1,367
75	13.32	1,422	1,121	1,593
90	23.4	1,667	1,111	1,852

 $D = \frac{\pi}{2} = 1,57079\dots$ 

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000
15	0.26	1,013	1,005	1,019
30	1.50	1,055	1,022	1,078
45	4.22	1,128	1,046	1,180
60	8.29	1,241	1,070	1,329
75	15.1	1,405	1,080	1,518
90	25.39	1,637	1,043	1,706

D=1,595

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000
15	0.27	1,013	1,005	1,019
30	1.53	1,054	1,020	1,076
45	4.31	1,127	1,042	1,174
60	8.46	1,239	1,063	1,316
75	15.31	1,400	1,067	1,493
90	26.31	1,627	1,020	1,660

$$D=1,6$$

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000
15	0.28	1,013	1,005	1,019
30	1.54	1,054	1,020	1,075
45	4.32	1,127	1,041	1,173
60	8.49	1,238	1,061	1,314
75	15.37	1,399	1,064	1,488
90	26.41	1,625	1,016	1,650

$$D=1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1,6180\dots$$

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000
15	0.28	1,013	1,005	1,018
30	1.57	1,054	1,019	1,074
45	4.39	1,126	1,038	1,169
60	9.2	1,236	1,056	1,305
75	15.59	1,395	1,055	1,471
90	27.19	1,618	1,000	1,618

$$D=1,69$$

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$	$(a)$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000	1,062
15	0.31	1,013	1,004	1,017	1,075
30	2.7	1,052	1,014	1,068	1,117
45	5.3	1,122	1,028	1,153	1,191
60	9.49	1,228	1,035	1,271	1,304
75	17.22	1,380	1,018	1,406	1,465
90	29.44	1,592	0,942	1,499	1,690

$$D=1 + \sin 45^\circ = 1,7071\dots$$

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$	$(a)$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000	1,076
15	0.31	1,013	1,004	1,016	1,090
30	2.9	1,052	1,013	1,066	1,133
45	5.8	1,121	1,025	1,150	1,207
60	9.59	1,227	1,030	1,263	1,320
75	17.42	1,377	1,010	1,391	1,482
90	30.17	1,586	0,929	1,473	1,707

$$D = \sqrt{3} = 1,7321\dots$$

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$	$(a)$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000	1,098
15	0.32	1,013	1,003	1,016	1,112
30	2.12	1,052	1,012	1,064	1,155
45	5.16	1,120	1,022	1,144	1,230
60	10.15	1,224	1,023	1,253	1,341
75	18.9	1,372	0,998	1,370	1,507
90	31.5	1,577	0,911	1,437	1,732

D = 2

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	S	$\beta$	( $a$ )
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000	1,000	1,333
15	0, 40	1,011	1,000	1,011	1,000	1,349
30	2, 45	1,047	0,998	1,044	1,002	1,396
45	6, 33	1,108	0,988	1,095	1,012	1,478
60	12, 46	1,200	0,960	1,152	1,042	1,600
75	22, 39	1,328	0,892	1,185	1,121	1,771
90	38, 57	1,500	0,750	1,125	1,333	2,000

D = 2,1

$\delta$	$2(\omega)$	$a$	$b$	S	$\beta$	( $a$ )
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000	1,000	1,423
15	0, 42	1,011	0,999	1,010	1,001	1,438
30	2, 55	1,045	0,993	1,038	1,007	1,487
45	6, 59	1,104	0,978	1,080	1,023	1,571
60	13, 55	1,192	0,940	1,121	1,064	1,696
75	24, 7	1,314	0,860	1,128	1,162	2,870
90	41, 34	1,476	0,703	1,040	1,142	2,100

D = 2,105

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	S	$\beta$	( $a$ )
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000	1,000	1,427
15	0, 42	1,011	0,999	1,010	1,001	1,443
30	2, 56	1,045	0,993	1,038	1,007	1,491
45	7, 0	1,107	0,979	1,084	1,021	1,579
60	13, 38	1,192	0,939	1,119	1,065	1,701
75	24, 11	1,314	0,858	1,113	1,165	1,875
90	41, 42	1,475	0,707	1,034	1,127	2,105

D = 2 +  $\frac{1}{10} \sqrt{2} = 2,1414\dots$

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	S	$\beta$	( $a$ )
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000	1,000	1,460
15	0, 43	1,011	1,998	1,009	1,002	1,476
30	2, 59	1,045	1,991	1,036	1,009	1,525
45	7, 9	1,103	0,973	1,073	1,027	1,610
60	13, 55	1,189	0,932	1,109	1,072	1,736
75	24, 42	1,309	0,847	1,109	1,180	1,911
90	42, 37	1,467	0,685	1,005	1,460	2,141

$$D = 2,148$$

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$	$\beta$	$(a)$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000	1,000	1,466
15	0.43	1,011	0,998	1,009	1,002	1,482
30	3.0	1,044	0,991	1,035	1,009	1,531
45	7.10	1,103	0,973	1,072	1,028	1,616
60	13.58	1,189	0,931	1,107	1,074	1,742
75	24.48	1,308	0,846	1,106	1,183	1,917
90	42.47	1,466	0,682	1,000	1,466	2,148

$$D = 1 + \sqrt{3} = 2,7321\dots$$

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$	$\beta$	$\Sigma$	$(a)$	$(S)$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	2,000	1,464
15	0.55	1,009	0,993	1,002	1,007	0,998	2,018	1,467
30	3.49	1,037	0,970	1,006	1,031	0,994	2,074	1,473
45	9.8	1,085	0,925	1,004	1,081	0,996	2,170	1,470
60	17.48	1,155	0,845	0,976	1,183	1,025	2,309	1,429
75	31.43	1,248	0,712	0,889	1,404	1,125	2,496	1,301
90	55.18	1,366	0,500	0,683	2,000	1,464	2,732	1,000

$$D = \infty \quad (a=1, S=b, \Sigma=\beta)$$

$\delta$	$2\omega$	$b$	$\beta$
0°	0° 0'	1,000	1,000
15	1.59	0,966	1,035
30	8.14	0,866	1,155
45	19.45	0,707	1,414
60	38.57	0,500	2,000
75	72.9	0,259	3,864
90	180.0	0,000	$\infty$

D	$z$	$z, 1$	$z, 105$	$z, 1414\dots$	$z, 148$
$\delta_{\mu}$	75° 31' 21"	70° 23' 2"	70° 7' 43"	68° 16' 10"	67° 56' 2"
$S_{\mu}$	1.1852	1.1339	1.1327	1.1166	1.1141

### TABLEAUX XLV.

Valeurs des éléments de la déformation de 5 en 5 degrés de colatitude pour cinq des projections centrales.

Projection authalique de Lambert.

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$	$(a)$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000	1,414
5	0.7	1,001	0,999	1,000	1,416
10	0.26	1,004	0,996	1,000	1,420
15	0.59	1,009	0,991	1,000	1,423
20	2.13	1,015	0,985	1,000	1,436
25	2.45	1,024	0,976	1,000	1,449
30	3.58	1,035	0,966	1,000	1,464
35	5.26	1,049	0,954	1,000	1,483
40	7.7	1,064	0,940	1,000	1,505
45	9.4	1,082	0,924	1,000	1,531
50	11.15	1,103	0,906	1,000	1,560
55	13.42	1,127	0,887	1,000	1,594
60	16.26	1,155	0,866	1,000	1,633
65	19.25	1,186	0,843	1,000	1,677
70	22.43	1,221	0,819	1,000	1,726
75	26.17	1,260	0,793	1,000	1,783
80	30.11	1,305	0,766	1,000	1,846
85	34.24	1,356	0,737	1,000	1,918
90	38.57	1,414	0,707	1,000	2,000

Projection de G. Postel.

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000
5	0.4	1,001	1,000	1,001
10	0.17	1,005	1,000	1,005
15	0.39	1,011	1,000	1,011
20	1.10	1,021	1,000	1,021
25	1.50	1,032	1,000	1,032
30	2.39	1,047	1,000	1,047
35	3.37	1,065	1,000	1,065
40	4.44	1,086	1,000	1,086
45	6.1	1,111	1,000	1,111
50	7.27	1,139	1,000	1,139
55	9.5	1,172	1,000	1,172
60	10.52	1,209	1,000	1,209
65	12.50	1,252	1,000	1,252
70	15.0	1,300	1,000	1,300
75	17.21	1,355	1,000	1,355
80	19.14	1,418	1,000	1,418
85	22.40	1,489	1,000	1,489
90	25.39	1,571	1,000	1,571

### Projection stéréographique.

δ	2ω	a	b	S
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000
5	0 . 0	1,002	1,002	1,004
10	0 . 0	1,008	1,008	1,015
15	0 . 0	1,017	1,017	1,035
20	0 . 0	1,031	1,031	1,063
25	0 . 0	1,049	1,049	1,101
30	0 . 0	1,072	1,072	1,149
35	0 . 0	1,099	1,099	1,209
40	0 . 0	1,132	1,132	1,282
45	0 . 0	1,172	1,172	1,373
50	0 . 0	1,217	1,217	1,482
55	0 . 0	1,271	1,271	1,615
60	0 . 0	1,333	1,333	1,778
65	0 . 0	1,406	1,406	1,976
70	0 . 0	1,490	1,490	2,221
75	0 . 0	1,589	1,589	2,524
80	0 . 0	1,704	1,704	2,904
85	0 . 0	1,840	1,840	3,384
90	0 . 0	2,000	2,000	4,000

### Perspective périmécoïque.

$$D=1+\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)=1,6180\dots$$

δ	2ω	a	b	S
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000
5	0 . 3	1,001	1,001	1,002
10	0 . 12	1,006	1,002	1,008
15	0 . 28	1,013	1,005	1,018
20	0 . 50	1,024	1,009	1,032
25	1 . 20	1,037	1,013	1,051
30	1 . 57	1,054	1,019	1,074
35	2 . 41	1,074	1,025	1,101
40	3 . 35	1,098	1,032	1,133
45	4 . 39	1,126	1,038	1,169
50	5 . 53	1,158	1,045	1,210
55	7 . 20	1,195	1,051	1,251
60	9 . 2	1,236	1,056	1,305
65	11 . 0	1,283	1,060	1,360
70	13 . 18	1,336	1,059	1,414
75	15 . 59	1,395	1,055	1,471
80	19 . 8	1,461	1,045	1,527
85	22 . 52	1,535	1,027	1,577
90	27 . 19	1,618	1,000	1,618

Perspective périalique.

D = 2,148

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	S	$\beta$	( $a$ )
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000	1,000	1,466
5	0.5	1,001	1,000	1,001	1,000	1,468
10	0.19	1,005	0,999	1,004	1,001	1,473
15	0.43	1,011	0,998	1,009	1,002	1,482
20	1.18	1,020	0,997	1,016	1,003	1,494
25	2.3	1,031	0,994	1,025	1,006	1,511
30	3.0	1,044	0,991	1,035	1,009	1,531
35	4.9	1,061	0,987	1,047	1,013	1,555
40	5.32	1,080	0,981	1,060	1,020	1,583
45	7.10	1,103	0,973	1,072	1,028	1,616
50	9.6	1,128	0,962	1,085	1,039	1,653
55	11.21	1,157	0,949	1,097	1,054	1,695
60	13.58	1,189	0,931	1,107	1,074	1,742
65	17.1	1,225	0,909	1,113	1,100	1,795
70	20.36	1,264	0,881	1,113	1,135	1,853
75	24.48	1,308	0,846	1,106	1,183	1,917
80	29.45	1,357	0,802	1,087	1,247	1,987
85	35.40	1,408	0,748	1,053	1,337	2,064
90	42.47	1,466	0,682	1,000	1,466	2,148

TABLEAUX XLVI.

Projections coniques autoçonales.

$n = \frac{2}{3}$

$e$	$a$	S
0°	1,275	1,624
5	1,207	1,457
10	1,151	1,326
15	1,106	1,223
20	1,070	1,144
25	1,041	1,084
30	1,020	1,041
35	1,007	1,014
40	1,000	1,001
45	1,002	1,003
50	1,011	1,002
55	1,029	1,060
60	1,059	1,122
65	1,105	1,220
70	1,172	1,373
75	1,274	1,624
80	1,446	2,092
85	1,813	3,288
90	$\infty$	$\infty$

$n = 0,8$

$e$	$a$	S
30°	1,075	1,156
35	1,076	1,095
40	1,024	1,030
45	1,010	1,019
50	1,001	1,003
55	1,001	1,001
60	1,008	1,015
65	1,024	1,050
70	1,054	1,111
75	1,103	1,216

$n = 0,807$

$e$	$a$	S
35	1,050	1,102
40	1,027	1,055
45	1,011	1,022
50	1,002	1,004
55	1,000	1,000
60	1,006	1,012
65	1,022	1,044
70	1,049	1,101

**TABLEAUX XLVII .**

Projections auto-gonales à méridiens circulaires.

<i>n</i>	<i>Valeurs de a pour</i>			
	$\ell=0, m=0$	$\ell=75^{\circ}, m=0$	$\ell=0, m=90^{\circ}$	$\ell=75^{\circ}, m=90^{\circ}$
1, 3	1, 037	1, 000	3, 799	1, 222
1, 4	1, 239	1, 000	6, 012	1, 199
1, 5	1, 487	1, 000	10, 15	1, 174
1, 6	1, 787	1, 000	18, 71	1, 148
1, 7	2, 163	1, 000	39, 70	1, 128
1, 8	2, 620	1, 000	107, 1	1, 107
1, 9	3, 179	1, 000	516, 9	1, 088
2, 0	3, 864	1, 000	$\infty$	1, 072

<i>n</i>	<i>Valeurs de S pour</i>			
	$\ell=0, m=0$	$\ell=75^{\circ}, m=0$	$\ell=0, m=90^{\circ}$	$\ell=75^{\circ}, m=90^{\circ}$
1, 3	1, 075	1, 000	14, 43	1, 493
1, 4	1, 535	1, 000	36, 15	1, 437
1, 5	2, 211	1, 000	103, 1	1, 379
1, 6	3, 193	1, 000	350, 1	1, 317
1, 7	4, 680	1, 000	1576	1, 271
1, 8	6, 863	1, 000	11460	1, 225
1, 9	10, 10	1, 000	267100	1, 184
2, 0	14, 93	1, 000	$\infty$	1, 149

**TABLEAUX XLVIII .**

Projections cylindriques authaliques.

*Valeurs de n*

<i>e'</i>	<i>e''</i>				
	0°	10°	20°	30°	40°
0°	1, 0000	0, 9924	0, 9694	0, 9306	0, 8752
10	0, 9924	0, 9848	0, 9620	0, 9235	0, 8686
20	0, 9694	0, 9620	0, 9397	0, 9021	0, 8484
30	0, 9306	0, 9235	0, 9021	0, 8660	0, 8145
40	0, 8752	0, 8686	0, 8484	0, 8145	0, 7660



Valeurs de  $\frac{1}{n}$

$e'$	$e''$				
	$0^\circ$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$
$0^\circ$	1,0000	1,0077	1,0316	1,0746	1,1425
10	1,0077	1,0154	1,0395	1,0828	1,1513
20	1,0316	1,0395	1,0642	1,1085	1,1786
30	1,0746	1,0828	1,1085	1,1547	1,2277
40	1,1425	1,1513	1,1786	1,2277	1,3054

Valeurs de  $e_0$

$e'$	$e''$				
	$0^\circ$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$
$0^\circ$	$0^\circ 0'$	$7^\circ 5'$	$14^\circ 13'$	$21^\circ 28'$	$28^\circ 56'$
10	7.5	10.0	15.51	22.33	29.42
20	14.13	15.51	20.0	25.34	31.58
30	21.28	22.33	25.34	30.0	35.28
40	28.56	29.42	31.58	35.28	40.0

Valeurs maxima de  $2\omega$

$e'$	$e''$				
	$0^\circ$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$
$0^\circ$	$0^\circ 0'$	$0^\circ 53'$	$3^\circ 34'$	$8^\circ 14'$	$15^\circ 13'$
10	0.53	0.0	2.41	7.22	14.21
20	3.34	2.41	0.0	4.41	11.41
30	8.14	7.22	4.41	0.0	7.1
40	15.13	14.21	11.41	7.1	0.0

Valeurs maxima de  $\alpha$

$e'$	$e''$				
	$0^\circ$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$
$0^\circ$	1,000	1,008	1,032	1,075	1,143
10	1,008	1,000	1,024	1,066	1,134
20	1,032	1,024	1,000	1,042	1,108
30	1,075	1,066	1,042	1,000	1,063
40	1,143	1,134	1,108	1,063	1,000

*Valours minima de b*

$e'$	$e''$				
	$0^\circ$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$
$0^\circ$	1,000	0,992	0,969	0,931	0,875
10	0,992	1,000	0,977	0,938	0,882
20	0,969	0,977	1,000	0,960	0,903
30	0,931	0,938	0,960	1,000	0,941
40	0,875	0,882	0,903	0,941	1,000

*Valours maxima de (a)*

$e'$	$e''$				
	$0^\circ$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$
$0^\circ$	1,000	1,015	1,064	1,155	1,305
10	1,015	1,000	1,048	1,137	1,286
20	1,064	1,048	1,000	1,085	1,227
30	1,155	1,137	1,085	1,000	1,131
40	1,305	1,286	1,227	1,131	1,000

**TABLEAUX XLIX.**

Projections coniques authaliques.

*Valours de  $\delta_0$*

$\delta'$	$\delta''$				
	$0^\circ$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$
$0^\circ$	$0^\circ 0'$	$7^\circ 4'$	$14^\circ 10'$	$21^\circ 16'$	$28^\circ 26'$
10	$7.4$	10.0	15.49	22.24	29.17
20	$14.10$	15.49	20.0	25.31	31.42
30	21.16	22.24	25.31	30.0	35.23
40	28.26	29.17	31.42	35.23	40.0
50	35.39	36.19	38.16	41.20	45.18
60	42.56	43.30	45.7	47.42	51.8
70	50.20	50.48	52.10	54.22	57.21
80	57.51	58.15	59.25	61.19	63.55
90	65.32	65.52	66.53	68.32	70.48

Valeurs de  $\delta_0$  (Suite)

$\delta'$	$\delta''$				
	50°	60°	70°	80°	90°
0°	35° 39'	42° 56'	50° 20'	57° 51'	65° 32'
10	36 . 19	43 . 30	50 . 48	58 . 15	65 . 52
20	38 . 16	45 . 7	52 . 10	59 . 25	66 . 53
30	41 . 20	47 . 42	54 . 22	61 . 19	68 . 32
40	45 . 18	51 . 8	57 . 21	63 . 55	70 . 48
50	50 . 0	55 . 16	61 . 0	67 . 8	73 . 38
60	55 . 16	60 . 0	65 . 14	70 . 55	77 . 1
70	61 . 0	65 . 14	70 . 0	75 . 14	80 . 53
80	67 . 8	70 . 55	75 . 14	80 . 0	85 . 13
90	73 . 38	77 . 1	80 . 53	85 . 13	90 . 0

Valeurs maxima de  $2\omega$

$\delta'$	$\delta''$				
	0°	10°	20°	30°	40°
0°	0° 0'	0° 13'	0° 53'	1° 59'	3° 34'
10	0 . 13	0 . 0	0 . 39	1 . 46	3 . 21
20	0 . 53	0 . 39	0 . 0	1 . 7	2 . 41
30	1 . 59	1 . 46	1 . 7	0 . 0	1 . 35
40	3 . 34	3 . 21	2 . 41	1 . 35	0 . 0
50	5 . 38	5 . 25	4 . 45	3 . 39	2 . 4
60	8 . 14	8 . 1	7 . 22	6 . 15	4 . 41
70	11 . 25	11 . 12	10 . 32	9 . 26	7 . 52
80	15 . 13	15 . 1	14 . 21	13 . 15	11 . 41
90	19 . 45	19 . 33	18 . 54	17 . 48	16 . 14

Valeurs maxima de  $2\omega$  (Suite)

$\delta'$	$\delta''$				
	50°	60°	70°	80°	90°
0°	5° 38'	8° 14'	11° 25'	15° 13'	19° 45'
10	5 . 25	8 . 1	11 . 12	15 . 1	19 . 33
20	4 . 55	7 . 22	10 . 32	14 . 21	18 . 54
30	3 . 39	6 . 15	9 . 26	13 . 15	17 . 48
40	2 . 4	4 . 41	7 . 52	11 . 41	16 . 14
50	0 . 0	2 . 36	5 . 47	9 . 37	14 . 11
60	2 . 36	0 . 0	3 . 11	7 . 1	11 . 36
70	5 . 47	3 . 11	0 . 0	3 . 50	8 . 25
80	9 . 37	7 . 1	3 . 50	0 . 0	4 . 35
90	14 . 11	11 . 36	8 . 25	4 . 35	0 . 0

Valeurs maxima de  $\alpha$

$\delta'$	$\delta''$				
	0°	10°	20°	30°	40°
0°	1,000	1,002	1,008	1,017	1,032
10	1,002	1,000	1,006	1,016	1,030
20	1,008	1,006	1,000	1,010	1,024
30	1,017	1,016	1,010	1,000	1,014
40	1,032	1,030	1,024	1,014	1,000
50	1,050	1,048	1,042	1,032	1,018
60	1,075	1,073	1,066	1,056	1,042
70	1,105	1,103	1,096	1,086	1,071
80	1,143	1,140	1,134	1,123	1,108
90	1,189	1,187	1,180	1,169	1,153

Valeurs maxima de  $\alpha$  (Suite)

$\delta'$	$\delta''$				
	50°	60°	70°	80°	90°
0°	1,050	1,075	1,105	1,143	1,189
10	1,048	1,073	1,103	1,140	1,187
20	1,042	1,066	1,096	1,134	1,180
30	1,032	1,056	1,086	1,123	1,169
40	1,018	1,042	1,071	1,108	1,153
50	1,000	1,023	1,052	1,088	1,132
60	1,023	1,000	1,028	1,063	1,107
70	1,052	1,028	1,000	1,034	1,076
80	1,088	1,063	1,034	1,000	1,041
90	1,132	1,107	1,076	1,041	1,000

Valeurs minima de  $\beta$

$\delta'$	$\delta''$				
	0°	10°	20°	30°	40°
0°	1,000	0,998	0,992	0,983	0,969
10	0,998	1,000	0,994	0,985	0,971
20	0,992	0,994	1,000	0,990	0,977
30	0,983	0,985	0,990	1,000	0,986
40	0,969	0,971	0,977	0,986	1,000
50	0,952	0,954	0,959	0,969	0,982
60	0,931	0,932	0,938	0,947	0,960
70	0,905	0,907	0,912	0,921	0,934
80	0,875	0,877	0,882	0,891	0,903
90	0,841	0,843	0,847	0,856	0,867

*Valeurs minima de b (Suite)*

$\delta'$	$\delta''$				
	50°	60°	70°	80°	90°
0°	0,952	0,931	0,905	0,875	0,841
10	0,954	0,932	0,907	0,877	0,843
20	0,959	0,938	0,912	0,882	0,847
30	0,969	0,947	0,921	0,891	0,856
40	0,982	0,960	0,934	0,903	0,867
50	1,000	0,978	0,951	0,919	0,883
60	0,978	1,000	0,973	0,941	0,904
70	0,951	0,973	1,000	0,967	0,929
80	0,919	0,941	0,967	1,000	0,961
90	0,883	0,904	0,929	0,961	1,000

*Valeurs maxima de (a)*

$\delta'$	$\delta''$				
	0°	10°	20°	30°	40°
0°	1,000	1,004	1,015	1,035	1,064
10	1,004	1,000	1,012	1,031	1,060
20	1,015	1,012	1,000	1,020	1,048
30	1,035	1,031	1,020	1,000	1,028
40	1,064	1,060	1,048	1,028	1,000
50	1,103	1,099	1,087	1,066	1,037
60	1,155	1,150	1,137	1,115	1,085
70	1,221	1,216	1,202	1,179	1,047
80	1,305	1,300	1,286	1,261	1,227
90	1,414	1,409	1,393	1,366	1,329

*Valeurs maxima de (a) (Suite)*

$\delta'$	$\delta''$				
	50°	60°	70°	80°	90°
0°	1,103	1,155	1,221	1,305	1,414
10	1,099	1,150	1,216	1,300	1,409
20	1,087	1,137	1,202	1,286	1,393
30	1,066	1,115	1,179	1,261	1,366
40	1,037	1,085	1,147	1,227	1,329
50	1,000	1,047	1,106	1,183	1,282
60	1,047	1,000	1,057	1,131	1,225
70	1,106	1,057	1,000	1,069	1,158
80	1,183	1,131	1,069	1,000	1,083
90	1,282	1,225	1,158	1,083	1,000

$\delta'$	$\delta''$	$n$	$\frac{1}{n}$	$\delta_0$
15°	90°	0,7011	1,4264	66°17'
20	55	0,8735	1,1448	41.40
15	55	0,8794	1,1371	40.38
0	25	0,9763	1,0243	17.43

$\delta'$	$\delta''$	<i>Maxima ou Minima de</i>			
		$2\omega$	$a'$	$b$	$(a)$
15°	90°	19°16'	1,184	0,845	1,402
20	55	5.59	1,054	0,949	1,110
15	55	6.22	1,057	0,946	1,118
0	25	1.22	1,012	0,988	1,024

**TABLEAUX L.**  
Projection dite de Bonne ou du Dépôt de la Guerre.

*Valeurs de  $2\omega$   
(Parallèle moyen de 45°)*

$e$	$m$					
	0°	5°	10°	15°	20°	25°
35	0°0'	0°37'	1°14'	1°51'	2°29'	3°6'
40	0.0	0.19	0.37	0.56	1.14	1.33
45	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
50	0.0	0.19	0.37	0.56	1.15	1.33
55	0.0	0.37	1.15	1.52	2.29	3.6
60	0.0	0.57	1.53	2.50	3.46	4.43
65	0.0	1.17	2.34	3.51	5.8	6.25
70	0.0	1.40	3.20	4.59	6.39	8.19

*Valeurs de  $2\omega$   
(Parallèle moyen de 45°)*

$e$	$m$			
	0°	1°	2°	3°
41°	0'0"	2'58"	5'56"	8'54"
42	0.0	2,13	4,27	6,40
43	0.0	1,29	2,58	4,27
44	0.0	0,44	1,29	2,13
45	0.0	0,0	0,0	0,0
46	0.0	0,44	1,29	2,13
47	0.0	1,29	2,58	4,27
48	0.0	2,13	4,27	6,40
49	0.0	2,58	5,56	8,54
50	0.0	3,42	7,25	11,8
51	0.0	4,27	8,54	13,22

Valeurs de  $2\omega$  (Suite)  
(Parallèle moyen de  $45^\circ$ )

$e$	$m$			
	$4^\circ$	$5^\circ$	$6^\circ$	$7^\circ$
$41^\circ$	11' 51"	14' 49"	17' 47"	20' 45"
$42$	8.53	11.7	13.20	15.33
$43$	5.55	7.24	8.53	10.22
$44$	2.57	3.42	4.27	5.11
$45$	0.0	0.0	0.0	0.0
$46$	2.57	3.42	4.27	5.11
$47$	5.55	7.24	8.53	10.22
$48$	8.53	11.7	13.20	15.33
$49$	11.51	14.49	17.47	20.45
$50$	14.50	18.33	22.15	25.57
$51$	17.49	22.16	26.43	31.10

Valeurs de  $2\omega$   
(Parallèle moyen de  $46^\circ$ )

$e$	$m$			
	$0^\circ$	$1^\circ$	$2^\circ$	$3^\circ$
$41^\circ$	0' 0"	3' 39"	7' 17"	10' 56"
$42$	0.0	2.55	5.49	8.44
$43$	0.0	2.11	4.22	6.33
$44$	0.0	1.27	2.55	4.22
$45$	0.0	0.44	1.27	2.11
$46$	0.0	0.0	0.0	0.0
$47$	0.0	0.44	1.27	2.11
$48$	0.0	1.27	2.55	4.22
$49$	0.0	2.11	4.22	6.33
$50$	0.0	2.55	5.49	8.44
$51$	0.0	3.39	7.17	10.56

Valeurs de  $2\omega$  (Suite)  
(Parallèle moyen de  $46^\circ$ )

$e$	$m$			
	$4^\circ$	$5^\circ$	$6^\circ$	$7^\circ$
$41$	14' 34"	18' 14"	21' 51"	25' 30"
$42$	11.39	14.34	17.28	20.23
$43$	8.44	10.55	13.6	15.17
$44$	5.59	7.16	8.44	10.11
$45$	2.54	3.38	4.22	5.6
$46$	0.0	0.0	0.0	0.0
$47$	2.54	3.38	4.22	5.6
$48$	5.49	7.16	8.44	10.11
$49$	8.44	10.55	13.6	15.17
$50$	11.39	14.34	17.29	20.23
$51$	14.34	18.14	21.52	25.30

**TABLEAUX LI.**

Perspectives périmécoïques pour diverses zones à une seule base.

$\Delta$	50°	45°	40°	35°	30°
<b>D</b>	1,876	1,899	1,920	1,938	1,955

$\Delta$	25°	20°	15°	10°	5°	0°
<b>D</b>	1,968	1,980	1,989	1,995	1,999	2,000

**D=1,876**

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000
5	0 . 4	1,001	1,000	1,002
10	0 . 16	1,005	1,001	1,006
15	0 . 36	1,012	1,001	1,013
20	1 . 5	1,021	1,002	1,024
25	1 . 43	1,034	1,003	1,037
30	2 . 30	1,049	1,004	1,053
35	3 . 28	1,067	1,004	1,072
40	4 . 37	1,089	1,004	1,093
45	5 . 59	1,113	1,003	1,116
50	7 . 36	1,142	1,000	1,142

**D=1,920**

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000
5	0 . 4	1,001	1,000	1,001
10	0 . 17	1,005	1,000	1,006
15	0 . 38	1,012	1,001	1,013
20	1 . 7	1,021	1,001	1,022
25	1 . 46	1,033	1,001	1,035
30	2 . 36	1,048	1,002	1,050
35	3 . 35	1,066	1,001	1,067
40	4 . 47	1,087	1,000	1,087



D-1,955

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000
5	0. 4	1,001	1,000	1,001
10	0. 17	1,005	1,000	1,005
15	0. 39	1,012	1,000	1,012
20	1. 9	1,021	1,001	1,021
25	1. 49	1,033	1,000	1,033
30	2. 40	1,048	1,000	1,048

D-1,968

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000
5	0. 4	1,001	1,000	1,001
10	0. 17	1,005	1,000	1,005
15	0. 39	1,012	1,000	1,012
20	1. 10	1,021	1,000	1,021
25	1. 50	1,033	1,000	1,033

D-1,980

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000
5	0. 4	1,001	1,000	1,001
10	0. 17	1,005	1,000	1,005
15	0. 39	1,012	1,000	1,012
20	1. 10	1,021	1,000	1,021

D-1,995

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000
5	0. 4	1,001	1,000	1,001
10	0. 17	1,005	1,000	1,005

## TABLEAUX LII.

Perspectives périaliques pour les zones des tableaux LI.

$\Delta$	D	$\delta_{\mu}$	$S_{\mu}$
50	2, 7 21	35° 59"	1, 0077
40	2, 8 20	28. 35	1, 0030
30	2, 8 98	21. 21	1, 0009
25	2, 9 29	17. 45	1, 0005
20	2, 9 54	14. 15	1, 0002
10	2, 9 89	6. 56	1, 0001
0	3, 0 00	0. 0	1, 0000

D = 2,721

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$	$\beta$	$(a)$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000	1,000	1,106
5	0 . 6	1,001	0,999	1,000	1,001	1,107
10	0 . 2½	1,00½	0,997	1,001	1,003	1,111
15	0 . 55	1,009	0,993	1,003	1,007	1,116
20	1 . 39	1,016	0,988	1,00½	1,012	1,12½
25	2 . 36	1,026	0,980	1,006	1,020	1,135
30	3 . 48	1,037	0,971	1,007	1,030	1,148
35	5 . 16	1,051	0,959	1,008	1,043	1,163
40	7 . 2	1,067	0,944	1,007	1,059	1,180
45	9 . 6	1,085	0,926	1,005	1,080	1,201
50	11 . 33	1,106	0,904	1,000	1,106	1,224

D = 2,820

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$	$\beta$	$(a)$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000	1,000	1,065
5	0 . 6	1,001	0,999	1,000	1,001	1,066
10	0 . 25	1,004	0,997	1,001	1,003	1,069
15	0 . 57	1,009	0,992	1,001	1,007	1,075
20	1 . 42	1,016	0,986	1,002	1,014	1,082
25	2 . 41	1,025	0,978	1,003	1,022	1,092
30	3 . 55	1,036	0,968	1,003	1,033	1,104
35	5 . 26	1,050	0,955	1,002	1,047	1,118
40	7 . 14	1,065	0,939	1,000	1,065	1,135

D = 2,898

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$	$\beta$	$(a)$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000	1,000	1,036
5	0 . 6	1,001	0,999	1,000	1,001	1,037
10	0 . 26	1,004	0,997	1,000	1,003	1,040
15	0 . 58	1,009	0,992	1,001	1,008	1,045
20	1 . 44	1,016	0,985	1,001	1,015	1,052
25	2 . 45	1,025	0,977	1,001	1,024	1,061
30	4 . 0	1,036	0,966	1,000	1,036	1,073

D = 2,929

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$	$\beta$	$(a)$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000	1,000	1,024
5	0.6	1,001	0,999	1,000	1,001	1,025
10	0.26	1,004	0,996	1,000	1,004	1,028
15	0.59	1,009	0,992	1,000	1,008	1,033
20	1.44	1,016	0,985	1,001	1,015	1,040
25	2.46	1,024	0,976	1,000	1,024	1,050

D = 2,954

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$	$\beta$	$(a)$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000	1,000	1,015
5	0.6	1,001	0,999	1,000	1,001	1,016
10	0.26	1,004	0,996	1,000	1,004	1,019
15	0.59	1,009	0,992	1,000	1,008	1,024
20	1.46	1,015	0,985	1,000	1,015	1,031

D = 2,989

$\delta$	$2\omega$	$a$	$b$	$S$	$\beta$	$(a)$
0°	0° 0'	1,000	1,000	1,000	1,000	1,004
5	0.7	1,001	0,999	1,000	1,001	1,005
10	0.26	1,004	0,996	1,000	1,004	1,008

FIN DES TABLEAUX NUMÉRIQUES.

3615 8









This book should be returned to  
the Library on or before the last date  
stamped below.

A fine is incurred by retaining it  
beyond the specified time.

Please return promptly.

JAN 17 1969 ILL

2274 190



Eng 528.81

Memoire sur la representation des

Cabot Science

006741973



3 2044 091 997 015